अध्याय 9

अनुक्रम तथा श्रेणी

Sequences and Series

प्रश्नावली 9.1

निर्देश (प्र. सं. 1 - 6) प्रत्येक प्रश्न के अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, जिनका n वाँ पद दिया गया है।

प्रश्न 1. $a_n = n(n+2)$

हल दिया है, $a_n = n(n+2)$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = 1(1+2) = 3$

$n = 2$ पर, $a_2 = 2(2+2) = 8$

$n = 3$ पर, $a_3 = 3(3+2) = 15$

$n = 4$ पर, $a_4 = 4(4+2) = 24$

$n = 5$ पर, $a_5 = 5(5+2) = 35$

प्रश्न 2. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

हल दिया है, $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$n = 2$ पर, $a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$n = 3$ पर, $a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

$n = 4$ पर, $a_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

$n = 5$ पर, $a_5 = \dfrac{5}{5+1} = \dfrac{5}{6}$

प्रश्न 3. $a_n = 2^n$

हल दिया है, $a_n = 2^n$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = 2^1 = 2$

$n = 2$ पर, $a_2 = 2^2 = 4$

$n = 3$ पर, $a_3 = 2^3 = 8$

$n = 4$ पर, $a_4 = 2^4 = 16$

$n = 5$ पर, $a_5 = 2^5 = 32$

प्रश्न 4. $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$

हल दिया है, $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = \dfrac{2 \times 1 - 3}{6} = \dfrac{2-3}{6} = -\dfrac{1}{6}$

$n = 2$ पर, $a_2 = \dfrac{2 \times 2 - 3}{6} = \dfrac{4-3}{6} = \dfrac{1}{6}$

$n = 3$ पर, $a_3 = \dfrac{2 \times 3 - 3}{6} = \dfrac{6-3}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$n = 4$ पर, $a_4 = \dfrac{2 \times 4 - 3}{6} = \dfrac{8-3}{6} = \dfrac{5}{6}$

$n = 5$ पर, $a_5 = \dfrac{2 \times 5 - 3}{6} = \dfrac{10-3}{6} = \dfrac{7}{6}$

प्रश्न 5. $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$

हल दिया है, $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = (-1)^{1-1} 5^{1+1} = (-1)^0 5^2 = 25$

$n = 2$ पर, $a_2 = (-1)^{2-1} 5^{2+1} = (-1)^1 5^3 = -125$

$n = 3$ पर, $a_3 = (-1)^{3-1} 5^{3+1} = (-1)^2 5^4 = 625$

$n = 4$ पर, $a_4 = (-1)^{4-1} 5^{4+1} = (-1)^3 5^5 = -3125$

$n = 5$ पर, $a_5 = (-1)^{5-1} 5^{5+1} = (-1)^4 5^6 = 15625$

प्रश्न 6. $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

हल दिया है, $a_n = \frac{n(n^2+5)}{4}$

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$n = 1$ पर, $a_1 = \frac{1(1^2+5)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$n = 2$ पर, $a_2 = \frac{2(2^2+5)}{4} = \frac{2(4+5)}{4} = \frac{9}{2}$

$n = 3$ पर, $a_3 = \frac{3(3^2+5)}{4} = \frac{3(9+5)}{4} = \frac{21}{2}$

$n = 4$ पर, $a_4 = \frac{4(4^2+5)}{4} = \frac{4(16+5)}{4} = 21$

$n = 5$ पर, $a_5 = \frac{5(5^2+5)}{4} = \frac{5(25+5)}{4} = \frac{75}{2}$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 10) प्रत्येक प्रश्न के अनुक्रमों में प्रत्येक का वांछित पद ज्ञात कीजिए। जिनका nवाँ पद दिया गया है।

प्रश्न 7. $a_n = 4n - 3$, a_{17}, a_{24}

हल दिया है, $a_n = 4n - 3$

$n = 17$ रखने पर, $a_{17} = 4 \times 17 - 3 = 68 - 3 = 65$

$n = 24$ रखने पर, $a_{24} = 4 \times 24 - 3 = 96 - 3 = 93$

प्रश्न 8. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, a_7

हल दिया है, $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

$n=7$ रखने पर, $a_7 = \frac{7^2}{2^7} = \frac{49}{128}$

प्रश्न 9. $a_n = (-1)^{n-1} n^3, a_9$

हल दिया है, $a_n = (-1)^{n-1} n^3$

$n=9$ रखने पर,

$$a_9 = (-1)^{9-1} 9^3 = (-1)^8 \times 9 \times 9 \times 9 = 729$$

प्रश्न 10. $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}, a_{20}$

हल दिया है, $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}$

$n=20$ रखने पर,

$$a_{20} = \frac{20(20-2)}{20+3}$$

$$a_{20} = \frac{20 \times 18}{23} = \frac{360}{23}$$

निर्देश (प्र. सं. 11 - 13) प्रत्येक प्रश्न के प्रत्येक अनुक्रम के पाँच पद लिखिए तथा संगत श्रेणी ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11. $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2$ सभी $n > 1$ के लिए

हल दिया है, $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2$, सभी $n > 1$ के लिए

$n = 2$ रखने पर, $a_2 = 3a_{2-1} + 2$

$\Rightarrow$ $a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times (3) + 2 = 9 + 2 = 11$

$n = 3$ रखने पर, $a_3 = 3a_{3-1} + 2 = 3a_2 + 2 = 3(11) + 2 = 33 + 2 = 35$

$n = 4$ रखने पर, $a_4 = 3a_{4-1} + 2 = 3a_3 + 2 = 3 \times 35 + 2 = 105 + 2 = 107$

$n = 5$ रखने पर, $a_5 = 3 \times a_{5-1} + 2 = 3a_4 + 2 = 3 \times 107 + 2 = 321 + 2 = 323$

$\therefore$ श्रेणी है, $3 + 11 + 35 + 107 + 323 \ldots$

प्रश्न 12. $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$

हल दिया है, $a_1 = -1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

$n = 2$ रखने पर, $a_2 = \frac{a_{2-1}}{2} = \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2}$

$n = 3$ रखने पर, $a_3 = \frac{a_{3-1}}{3} = \frac{a_2}{3} = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$

$n = 4$ रखने पर, $a_4 = \frac{a_{4-1}}{4} = \frac{a_3}{4} = \frac{-\frac{1}{6}}{4} = -\frac{1}{24}$

$n = 5$ रखने पर, $\quad a_5 = \frac{a_{5-1}}{5} = \frac{a_4}{5} = \frac{-\frac{1}{24}}{5} = -\frac{1}{120}$

$\therefore$ श्रेणी है, $(-1) + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{24}\right) + \left(-\frac{1}{120}\right) + \ldots -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24} - \frac{1}{120} - \ldots$

प्रश्न 13. $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

हल दिया है, $a_1 = a_2 = 2$

तथा $\quad a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

$n = 3$ रखने पर, $\quad a_3 = a_{3-1} - 1 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$

$n = 4$ रखने पर, $\quad a_4 = a_{4-1} - 1$

$= a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$n = 5$ रखने पर, $\quad a_5 = a_{5-1} - 1 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$

$\therefore$ श्रेणी है, $2 + 2 + 1 + 0 + (-1) + \ldots$

प्रश्न 14. फाइबोनेकी (Fibonacci) अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है $1 = a_1 = a_2$ तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$, तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$

हल यहाँ, $\quad 1 = a_1 = a_2$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$

$n = 3, 4, 5, 6$ रखने पर,

$n = 3$ पर, $\quad a_3 = a_{3-1} + a_{3-2}$

$= a_2 + a_1$

$= 1 + 1 = 2$

$n = 4$ पर, $\quad a_4 = a_{4-1} + a_{4-2}$

$= a_3 + a_2$

$= 2 + 1 = 3$

$n = 5$ पर, $\quad a_5 = a_{5-1} + a_{5-2}$

$= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$

$n = 6$ पर, $\quad a_6 = a_{6-1} + a_{6-2}$

$= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

अब, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए,

$n = 1$ पर, $\quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

$n=2$ पर, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1}=2$

$n=3$ पर, $\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

$n=4$ पर, $\frac{a_5}{a_4}=\frac{5}{3}$

$n=5$ पर, $\frac{a_6}{a_5}=\frac{8}{5}$

अतः पद $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ तथा $\frac{8}{5}$ हैं।

प्रश्नावली 9.2

प्रश्न 1. 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम 1 से 2001 तक के पदों की संख्या निकालेंगे और इसके बाद सूत्र

$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का प्रयोग करेंगे।

हल 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों की श्रेणी है, $1+3+5+7+\ldots+2001$

यहाँ, पहला पद $a=1$

सार्वान्तर $d=2$

हम जानते हैं कि श्रेणी का nवाँ पद $T_n=a+(n-1)d$

$\therefore \quad 2001=1+(n-1)2 \quad (\because a=1, T_n=2001$ दिया है)

$\Rightarrow \quad 2000=(n-1)2 \quad \Rightarrow \quad (n-1)=\frac{2000}{2}$

$\Rightarrow \quad n-1=1000 \quad \Rightarrow \quad n=1001$

अब, अभीष्ट योग $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$=\frac{1001}{2}[2\times 1+(1001-1)\times 2]$

$=\frac{1001}{2}\times 2\,(1+1001-1)=1001\times 1001=1002001$

प्रश्न 2. 100 तथा 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हों।

सर्वप्रथम हम सूत्र $T_n=a+(n-1)d$ द्वारा 100 तथा 1000 के बीच स्थित उन पदों की कुल संख्या निकालेंगे जो 5 के गुणज हैं तथा इसके बाद सूत्र $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का प्रयोग करेंगे।

हल प्रश्नानुसार, संख्याएँ हैं 105, 110, 115, ..., 995

यहाँ, पहला पद, $a = 105$

तथा सार्वान्तर, $d = 110 - 105 = 5$

अब, nवाँ पद $\quad T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow \quad 995 = 105 + (n-1)5 \qquad (\because a = 105, T_n = 995)$

$\Rightarrow \quad 995 - 105 = (n-1)5$

$\Rightarrow \quad 890 = (n-1)5$

$\Rightarrow \quad n - 1 = \frac{890}{5} \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 178$

$\Rightarrow \quad n = 178 + 1 = 179$

अतः अभीष्ट संख्याओं का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{179}{2}[2 \times 105 + (179-1)5]$$

$$= \frac{179}{2}[210 + 178 \times 5]$$

$$= \frac{179}{2}[210 + 890] = \frac{179}{2} \times 1100$$

$$= 179 \times 550 = 98450$$

प्रश्न 3. किसी समांतर श्रेढ़ी में प्रथम पद 2 है तथा प्रथम पाँच पदों का योगफल, अगले पाँच पदों के योगफल का एक-चौथाई है। दर्शाइए कि 20वाँ पद – 112 है।

हल मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी है, $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots$

दिया है, $a = 2$

प्रश्नानुसार,

प्रथम पाँच पदों का योग $= \frac{1}{4}$ अगले पाँच पदों का योग

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + a + 4d$$
$$= \frac{1}{4}[a + 5d + a + 6d + a + 7d + a + 8d + a + 9d]$$

$\Rightarrow \quad 5a + 10d = \frac{1}{4}[5a + 35d]$

$\Rightarrow \quad 4[5a + 10d] = 5a + 35d$

$\Rightarrow \quad 20a + 40d = 5a + 35d \quad \Rightarrow \quad 20a - 5a = 35d - 40d$

$\Rightarrow \quad 15a = -5d \quad \Rightarrow \quad 15 \times 2 = -5d$

$\Rightarrow \quad 30 = -5d \qquad (\because a = 2)$

$\Rightarrow \quad \cancel{d = \frac{-30}{5} = -6}$

अब, $T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow$ $T_{20} = 2 + (20-1)(-6) = 2 + 19(-6)$

$= 2 - 19 \times 6 = 2 - 114 = -112$

प्रश्न 4. **समांतर श्रेढ़ी $-6, -\frac{11}{2}, -5 \ldots$ के कितने पदों का योगफल -25 है?**

हल दिया हुआ अनुक्रम $-6, -\frac{11}{2}, -5 \ldots$ समांतर श्रेढ़ी में है।

यहाँ, $a = -6$, $d = -\frac{11}{2} - (-6) = -\frac{11}{2} + 6 = -\frac{11}{2} + \frac{6}{1}$

$$d = \frac{-11 + 12}{2} = \frac{1}{2}$$

अब, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow$ $-25 = \frac{n}{2}\left[2 \times (-6) + (n-1)\frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow$ $-25 \times 2 = n\left[\frac{-12}{1} + \frac{(n-1)}{2}\right]$

$\Rightarrow$ $-50 = n\left[\frac{-24 + n - 1}{2}\right]$

$\Rightarrow$ $-50 \times 2 = n(n-25)$

$\Rightarrow$ $-100 = n^2 - 25n$

$\Rightarrow$ $n^2 - 25n + 100 = 0$

मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$n^2 - (20+5)n + 100 = 0$

$\Rightarrow$ $n^2 - 20n - 5n + 100 = 0$

$\Rightarrow$ $n(n-20) - 5(n-20) = 0 \Rightarrow n = 5, 20$

प्रश्न 5. **किसी समांतर श्रेढ़ी का pवाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा q वाँ पद $\frac{1}{p}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि प्रथम pq पदों का योग $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा, जहाँ $p \neq q$**

सर्वप्रथम हम सूत्र $T_n = a + (n-1)d$ का प्रयोग कर a तथा d के मान निकालेंगे तथा इसके बाद पदों के योग का सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ का प्रयोग कर योग निकालेंगे।

हल $\because$ $T_n = a + (n-1)d$

$\therefore$ $T_p = a + (p-1)d = \frac{1}{q}$ (दिया है) ...(i)

तथा $a + (q-1) = \frac{1}{p}$ (दिया है) ...(ii)

समी (ii) में से समी (i) को घटाने पर,

$$d(p-1-q+1)=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \quad d(p-q)=\frac{p-q}{pq} \quad \Rightarrow \quad d=\frac{1}{pq}$$

d का मान समी (i) में रखने पर,

$$a+\frac{(p-1)}{pq}=\frac{1}{q}$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{1}{q}-\frac{p-1}{pq}$$

$$\Rightarrow \quad a=\frac{p-p+1}{pq}=\frac{1}{pq}$$

अब,

$$S_{pq}=\frac{pq}{2}[2a+(pq-1)d] \quad \left[\because S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\right]$$

$$=\frac{pq}{2}\left[2\times\frac{1}{pq}+(pq-1)\frac{1}{pq}\right]$$

$$=\frac{pq}{2}\times\frac{1}{pq}(2+pq-1)=\frac{1}{2}(pq+1)$$ इति सिद्धम्

प्रश्न 6. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी 25, 22, 19,... के कुछ पदों का योगफल 116 है, तो अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

सर्वप्रथम हम सूत्र $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का प्रयोग कर पदों की संख्या निकालेंगे तत्पश्चात् सूत्र $T_n=a+(n-1)d$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी हुई समांतर श्रेढ़ी 25, 22, 19, ... है।

यहाँ $a=25, d=-3$ तथा $S_n=116$

$$\because \quad S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore \quad 116=\frac{n}{2}[2\times 25+(n-1)(-3)]$$

$$\Rightarrow \quad 116\times 2=n[50-3n+3]$$

$$\Rightarrow \quad 232=n[53-3n]$$

$$\Rightarrow \quad 232=53n-3n^2$$

$$\Rightarrow \quad 3n^2-53n+232=0$$

अब, मध्य पद विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$\Rightarrow \quad 3n^2-(24+29)n+232=0$$

$$\Rightarrow \quad 3n^2-24n-29n+232=0$$

$$\Rightarrow \quad 3n(n-8)-29(n-8)=0$$

$\Rightarrow$ $$(3n-29)(n-8)=0$$

$\Rightarrow$ $$n=\frac{29}{3}, n=8$$

$n=\frac{29}{3}$ अमान्य है क्योंकि n भिन्न नहीं हो सकता। अतः केवल $n=8$ मान्य है।

अब, $$T_n = a+(n-1)d$$

$$T_8 = 25+(8-1)(-3)$$

$$= 25+7\times(-3)=25-21=4$$

प्रश्न 7. **उस समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका K वाँ पद $5K+1$ है।**

सर्वप्रथम हम Kवाँ पद की मदद से श्रेणी निकालेंगे तथा इसके बाद n पदों के योग का सूत्र $S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का प्रयोग करके योग ज्ञात करेंगे।

हल दिया है, Kवाँ पद $T_K=5K+1$

$K=1, 2, 3, 4, \ldots$ रखने पर,

$$T_1 = 5\times1+1=6$$

$$T_2 = 5\times2+1=11$$

$$T_3 = 5\times3+11=16 \text{ इत्यादि}$$

$\Rightarrow$ $$a=6, d=11-6=5$$

अब, $$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=\frac{n}{2}[2\times6+(n-1)5]$$

$$=\frac{n}{2}[12+5n-5]=\frac{n}{2}[5n+7]$$

प्रश्न 8. **यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के n पदों का योगफल $(pn+qn^2)$ है, जहाँ p तथा q अचर हों, तो सार्वान्तर ज्ञात कीजिए।**

यहाँ हम $T_n=S_n-S_{n-1}$ का प्रयोग कर T_n ज्ञात करेंगे तथा इसके बाद हम कोई एक पद तथा सार्वान्तर ज्ञात कर सकते हैं।

हल दिया है, $S_n=pn+qn^2$

अब, $$T_n=S_n-S_{n-1}$$

$\Rightarrow$ $$T_n=(pn+qn^2)-[p(n-1)+q(n-1)^2]$$

$$=pn+qn^2-[pn-p+q(n^2+1-2n)]$$

$$=pn+qn^2-(pn-p+qn^2+q-2qn)$$

$$=pn+qn^2-pn+p-qn^2-q+2qn=p-q+2qn$$

अब, $n = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर,

$$\Rightarrow \quad T_1 = p - q + 2q \times 1 = p - q + 2q = p + q$$
$$\Rightarrow \quad T_2 = p - q + 2q \times 2 = p - q + 4q = p + 3q$$
$$\Rightarrow \quad T_3 = p - q + 2q \times 3 = p - q + 6q = p + 5q$$

....

....

....

अतः श्रेणी है $p+q, p+3q, p+5q$ ....

जिसका सार्वान्तर $= (p+3q) - (p+q) = 2q$

प्रश्न 9. दो समांतर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफल का अनुपात $5n + 4 : 9n + 6$ हो, तो उनके 18वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए दो समांतर श्रेढ़ियों के प्रथम पद तथा सार्वान्तर क्रमशः a_1, a_2 तथा d_1, d_2 हैं। प्रश्नानुसार,

$$\frac{S_{n_1}}{S_{n_2}} = \frac{5n+4}{9n+6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{5n+4}{9n+6} \qquad \left[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{5n+4}{9n+6}$$

(हमें 18वें पदों का अनुपात ज्ञात करना है इसलिए 2 उभयनिष्ठ लेकर समीकरण को nवें पद में बदल लेते हैं।)

$$\Rightarrow \quad \frac{2\left[a_1 + \frac{n-1}{2}d_1\right]}{2\left[a_2 + \frac{n-1}{2}d_2\right]} = \frac{5n+4}{9n+6}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d_1}{a_2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d_2} = \frac{5n+4}{9n+6} \qquad \ldots(i)$$

हमें $\frac{a_1 + 17d_1}{a_2 + 17d_2}$ का मान ज्ञात करना है।

$$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 17 \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 2 \times 17$$

$$\Rightarrow \quad n = 34 + 1 \quad \Rightarrow \quad n = 35$$

अतः समी (i) से,

$$\frac{a_1 + 17d_1}{a_2 + 17d_2} = \frac{5 \times 35 + 4}{9 \times 35 + 6} = \frac{175 + 4}{315 + 6} = \frac{179}{321}$$

प्रश्न 10. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योगफल के बराबर हो, तो प्रथम $(p + q)$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ का प्रयोग कर इसे सरल करेंगे।

हल मान लीजिए दी हुई समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वान्तर d है।

प्रश्नानुसार, चूँकि प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योग के बराबर है।

$$\therefore \quad S_p = S_q$$

$$\Rightarrow \quad \frac{p}{2}[2a + (p-1)d] = \frac{q}{2}[2a + (q-1)d] \quad \left[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}\right]$$

$$\Rightarrow \quad p[2a + (p-1)d] = q[2a + (q-1)d]$$

$$\Rightarrow \quad 2ap + p(p-1)d = 2aq + q(q-1)d$$

$$\Rightarrow \quad 2ap - 2aq = q(q-1)d - p(p-1)d$$

$$\Rightarrow \quad 2a(p-q) = d(q^2 - q - p^2 + p)$$

$$\Rightarrow \quad 2a(p-q) = d[(p-q) + (q^2 - p^2)]$$

$$\Rightarrow \quad 2a(p-q) = d[(p-q) + (q-p)(q+p)]$$

$$\Rightarrow \quad 2a(p-q) = d(p-q)[1 - (p+q)]$$

$$\Rightarrow \quad 2a = d[1 - (p+q)]$$

$$\Rightarrow \quad 2a = -d[(p+q) - 1]$$

$$\Rightarrow \quad 2a + d(p+q-1) = 0 \quad \ldots(i)$$

अब,

$$S_{p+q} = \frac{p+q}{2}[2a + (p+q-1)d]$$

$$= \frac{p+q}{2} \times 0 \quad [\text{समी (i) से}]$$

$$= 0$$

प्रश्न 11. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$$

हल मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद A तथा सार्वान्तर d है।

दिया है, $S_p = a \Rightarrow \frac{p}{2}[2A + (p-1)d] = a \quad \left[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}\right] \quad \ldots(i)$

$$S_q = b \Rightarrow \frac{q}{2}[2A + (q-1)d] = b \quad \ldots(ii)$$

तथा

$$S_r = c \Rightarrow \frac{r}{2}[2A + (r-1)d] = c \quad \ldots(iii)$$

अब, हमें

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0 \text{ सिद्ध करना है।}$$

बायाँ पक्ष $=\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)$

समी (i), (ii) तथा (iii) से क्रमशः a, b तथा c के मान रखने पर,

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=\frac{1}{p}\times\frac{p}{2}[2A+(p-1)d](q-r)+\frac{1}{q}\times\frac{q}{2}$

$$[2A+(q-1)d](r-p)+\frac{1}{r}\times\frac{r}{2}[2A+(r-1)d](p-q)$$

$$=\frac{1}{2}[\{2A+(p-1)d\}(q-r)+\{2A+(q-1)d\}$$

$$(r-p)+\{2A+(r-1)d\}(p-q)]$$

$$=\frac{1}{2}[2A(q-r)+(p-1)d(q-r)+2A(r-p)$$

$$+(q-1)d(r-p)+2A(p-q)+(r-1)d(p-q)]$$

$$=\frac{1}{2}2A(q-r+r-p+p-q)$$

$$+d[(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)]$$

$$=\frac{1}{2}[2A\times(0)+d(pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+rp-rq-p+q)]$$

$$=\frac{1}{2}(0+d\times 0)=0$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष   इति सिद्धम्

नोट *यहाँ विद्यार्थी को पहला पद a नहीं लेना चाहिए क्योंकि p पदों का योग a दिया हुआ है।*

प्रश्न 12. **किसी समांतर श्रेढ़ी के m तथा n पदों के योगफलों का अनुपात $m^2 : n^2$ है, तो दर्शाइए कि mवें तथा nवें पदों का अनुपात $(2m-1):(2n-1)$ है।**

हल मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी है, $a, a+d, a+2d, a+3d \ldots$

दिया है, $$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]}{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}=\frac{m^2}{n^2} \qquad \left[\because S_n=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{m[2a+(m-1)d]}{n[2a+(n-1)d]}=\frac{m^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2a+(m-1)d}{2a+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

$\Rightarrow$ $$[2a + (m-1)d]n = [2a + (n-1)d]\,m$$
$\Rightarrow$ $$2an + (m-1)dn = 2am + (n-1)dm$$
$\Rightarrow$ $$2an - 2am = (n-1)dm - (m-1)dn$$
$\Rightarrow$ $$2a(n-m) = d\,[(n-1)m - (m-1)n]$$
$\Rightarrow$ $$2a(n-m) = d\,(mn - m - mn + n)$$
$\Rightarrow$ $$2a(n-m) = d\,(n-m) \;\Rightarrow\; 2a = d$$
अब, $$\frac{T_m}{T_n} = \frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d} = \frac{a+(m-1)2a}{a+(n-1)2a} \quad [\because T_n = a+(n-1)d]$$
अंश तथा हर से a उभयनिष्ठ लेने पर,
$\Rightarrow$ $$\frac{T_m}{T_n} = \frac{1+2(m-1)}{1+2(n-1)} = \frac{1+2m-2}{1+2n-2} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

प्रश्न 13. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के nवें पद का योगफल $3n^2+5n$ है तथा इसका mवाँ पद 164 है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

जब कभी श्रेणी का योग दिया हुआ होता है, तब हमें सूत्र $T_m = S_m - S_{m-1}$ का प्रयोग कर T_m निकालना चाहिए और बाद में इसे सरल करना चाहिए।

हल दिया है, $$S_n = 3n^2 + 5n$$
$\therefore$ $$S_m = 3m^2 + 5m \quad \text{तथा} \quad S_{m-1} = 3(m-1)^2 + 5(m-1)$$
सूत्र $T_m = S_m - S_{m-1}$ का प्रयोग करने पर,
$\Rightarrow$ $$\begin{aligned} T_m &= (3m^2 + 5m) - [3(m-1)^2 + 5(m-1)] \\ &= (3m^2 + 5m) - [3(m^2 + 1 - 2m) + 5m - 5] \\ &= (3m^2 + 5m) - (3m^2 + 3 - 6m + 5m - 5) \\ &= 3m^2 + 5m - 3m^2 - 3 + 6m - 5m + 5 = 6m + 2 \end{aligned}$$
किंतु दिया है, $$T_m = 164$$
$\therefore$ $$6m + 2 = 164 \;\Rightarrow\; 6m = 164 - 2$$
$\Rightarrow$ $$6m = 162 \;\Rightarrow\; m = \frac{162}{6} = 27$$

प्रश्न 14. 8 और 26 के बीच ऐसी 5 संख्याएँ डालिए ताकि प्राप्त अनुक्रम समांतर श्रेढ़ी बन जाए।

हल मान लीजिए 8 और 26 के बीच 5 संख्याएँ A_1, A_2, A_3, A_4 तथा A_5 हैं, तब $8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26$ समांतर श्रेढ़ी में होंगी।
$\because$ $$T_n = a + (n-1)d$$
$\therefore$ $$26 = 8 + (7-1)d \qquad (n = 7 \because 2 \text{ पद हैं तथा } 5 \text{ संख्याएँ हैं।})$$
$\Rightarrow$ $$26 - 8 = 6d$$

$\Rightarrow \qquad 18 = 6d \Rightarrow d = \frac{18}{6} \Rightarrow d = 3$

अब, $\qquad A_1 = a + d = 8 + 3 = 11$

$\Rightarrow \qquad A_2 = a + 2d = 8 + 2 \times 3 = 14$

$A_3 = a + 3d = 8 + 3 \times 3 = 17$

$A_4 = a + 4d = 8 + 4 \times 3 = 20$

तथा $\qquad A_5 = a + 5d = 8 + 5 \times 3 = 23$

प्रश्न 15. यदि $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समांतर माध्य हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हम जानते हैं कि दो संख्याएँ a तथा b के बीच समांतर माध्य $\frac{a+b}{2}$ होता है। प्रश्न में दिए हुए समांतर माध्य को $\frac{a+b}{2}$ के बराबर रखकर इसे हल करते हैं।

हल a तथा b के बीच दिया हुआ समांतर माध्य $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$ है किंतु हम जानते हैं कि a तथा b के बीच समांतर माध्य $\frac{a+b}{2}$ होता है।

$$\therefore \qquad \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad 2(a^n + b^n) = (a^{n-1} + b^{n-1})(a + b)$$

$$\Rightarrow \qquad 2a^n + 2b^n = a^{n-1}a^1 + a^{n-1}b + b^{n-1}a^1 + b^{n-1}b^1$$

$$\Rightarrow \qquad 2a^n + 2b^n = a^n + a^{n-1}b + b^{n-1}a + b^n$$

$$\Rightarrow \qquad 2a^n + 2b^n - a^n - a^{n-1}b - b^{n-1}a - b^n = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a^n + b^n - a^{n-1}b - b^{n-1}a = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (a^n - a^{n-1}b) + (b^n - b^{n-1}a) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a^{n-1}(a - b) - b^{n-1}(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (a - b)(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad a^{n-1} - b^{n-1} = 0 \qquad (\because a - b \neq 0)$$

$$\Rightarrow \qquad a^{n-1} = b^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1$$

दोनों ओर $\left(\frac{a}{b}\right)$ के घातों की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Rightarrow n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

प्रश्न 16. m संख्याओं को 1 तथा 31 तक रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेढ़ी है और 7वीं एवं $(m-1)$ वीं संख्याओं का अनुपात $5:9$ है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

दी हुई संख्याओं के बीच संख्या रखने के बाद, सर्वप्रथम हम सूत्र $T_n = a + (n-1)d$ का प्रयोग कर d निकालेंगे तथा दिए हुए अनुपात का प्रयोग कर हम m का मान निकालेंगे।

हल मान लीजिए 1 तथा 31 के बीच m संख्याएँ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ हैं।

अर्थात् $1, A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots, A_m, 31$ समांतर श्रेणी है।

अब, $$T_n = a + (n-1)d$$
$$31 = 1 + (m+2-1)d$$
[$\because n = m+2$ जहाँ दो पद (1 तथा 31) हैं, m संख्याएँ हैं]

$$\Rightarrow \quad 31 - 1 = (m+1)d$$
$$\Rightarrow \quad 30 = (m+1)d \Rightarrow d = \frac{30}{m+1} \quad \ldots(i)$$

दिया है, $$\frac{T_7}{T_{m-1}} = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{a+7d}{a+(m-1)d} = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1 + 7 \times \frac{30}{m+1}}{1 + (m-1) \times \frac{30}{m+1}} = \frac{5}{9} \quad \text{[समी (i) से]}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{m+1+210}{m+1}}{\frac{(m+1)+30(m-1)}{m+1}} = \frac{5}{9} \quad \Rightarrow \quad \frac{m+211}{m+1+30m-30} = \frac{5}{9}$$
$$\Rightarrow \quad 9(m+211) = 5(31m-29)$$
$$\Rightarrow \quad 9m + 1899 = 155m - 145$$
$$\Rightarrow \quad 1899 + 145 = 155m - 9m$$
$$\Rightarrow \quad 146m = 2044$$
$$\Rightarrow \quad m = \frac{2044}{146} = 14$$

प्रश्न 17. एक व्यक्ति ऋण का भुगतान ₹100 की प्रथम किश्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किश्त में ₹ 5 प्रतिमाह बढ़ाता है, तो 30वीं किश्त की राशि क्या होगी?

यहाँ प्रथम किश्त को समांतर श्रेढ़ी का प्रथम पद लेते हैं तथा प्रतिमाह बढ़ी किश्त को समांतर श्रेढ़ी का सार्वान्तर लेते हैं।

हल दिया है, $a = 100, d = 5 \quad \because T_n = a + (n-1)d$

$$\therefore \quad T_{30} = 100 + (30-1)5 = 100 + 29 \times 5 = 100 + 145 = 245$$

प्रश्न 18. **एक बहुभुज की दो क्रमिक अंतः कोणों का अंतर 5° है। यदि सबसे छोटा कोण 120° हो, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।**

यहाँ, हम बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों के योग का सूत्र $(n-2)\,180°$ का प्रयोग करेंगे।

हल हम जानते हैं कि $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

परंतु किसी बहुभुज के सभी आंतरिक कोणों के योग के लिए, $S_n = (n-2)180°$

$\therefore \quad (n-2)\,180° = \frac{n}{2}[2 \times 120° + (n-1)(5)] \qquad (\because a = 120°, d = 5)$

$\Rightarrow \quad (n-2)\,180 \times 2 = n(240 + 5n - 5)$

$\Rightarrow \quad (n-2)\,360 = n(5n + 235)$

$\Rightarrow \quad (n-2)\,72 = n(n + 47) \quad \Rightarrow \quad 72n - 144 = n^2 + 47n$

$\Rightarrow \quad n^2 + 47n - 72n + 144 = 0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - 25n + 144 = 0$

अब, मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$\Rightarrow \quad n^2 - (16 + 9)\,n + 144 = 0$

$\Rightarrow \quad n^2 - 16n - 9n + 144 = 0$

$\Rightarrow \quad n(n-16) - 9(n-16) = 0$

$\Rightarrow \quad (n-16)(n-9) = 0$

$\Rightarrow \quad n = 9, 16$

केवल $n = 9$ अभीष्ट भुजाओं की संख्या है।

नोट *यदि* $n = 16$,

$\Rightarrow \quad T_n = 120 + (16-1)\,5 = 120 + 15 \times 5 = 120 + 75 = 195 > 180°$

जो संभव नहीं है।

अतः बहुभुज में भुजाओं की संख्या 9 है।

प्रश्नावली 9.3

प्रश्न 1. **गुणोत्तर श्रेढ़ी $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ का 20वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।**

(प्र. सं. 1 - 4) गुणोत्तर श्रेढ़ी के n वें पद का सूत्र, $T_n = ar^{n-1}$ का प्रयोग करेंगे।

हल दी हुई श्रेणी है, $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

यहाँ, $a =$ प्रथम पद $= \frac{5}{2}$ तथा सार्वानुपात $(r) = \frac{5/4}{5/2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

अब, $T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow$ $$T_{20} = ar^{20-1} = \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20-1} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2^{19}} = \frac{5}{2^{20}}$$

पुनः $$T_n = ar^{n-1} = \left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{5}{2^{1+n-1}} = \frac{5}{2^n}$$

प्रश्न 2. उस गुणोत्तर श्रेढ़ी का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्वानुपात 2 है।

हल दिया है, 8वाँ पद $T_8 = 192$

तथा सार्वानुपात $r = 2$

$\Rightarrow$ $ar^{8-1} = 192$ $(\because T_n = ar^{n-1})$

$\Rightarrow$ $a \times (2)^7 = 192$

$\Rightarrow$ $a \times 128 = 192$

$\Rightarrow$ $a = \frac{192}{128} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2}$

अब, $$T_{12} = ar^{12-1} = \frac{3}{2} \times (2)^{11} = \frac{3}{2} \times 2^{11} = 3 \times 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072$$

प्रश्न 3. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 5वाँ, 8वाँ तथा 11वाँ पद क्रमशः p, q तथा s हैं, तो दिखाइए कि $q^2 = ps$

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वानुपात r है।

$T_5 = p \Rightarrow ar^4 = p$ ...(i)

$T_8 = q \Rightarrow ar^7 = q$ ...(ii)

तथा $T_{11} = s \Rightarrow ar^{10} = s$ ...(iii)

समी (i) तथा (ii) को गुणा करने पर,

$ar^4 \times ar^{10} = ps$

$a^2 r^{14} = ps$

$\Rightarrow$ $[(ar)^7]^2 = ps$ [समी (ii) से]

$\Rightarrow$ $q^2 = ps$ इति सिद्धम्

प्रश्न 4. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद – 3 है, तो 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा सार्वानुपात r है।

दिया है, $T_4 = (T_2)^2$ $(\because T_n = ar^{n-1})$

$\Rightarrow$ $ar^3 = (ar)^2$

$\Rightarrow \quad ar^3 = a^2r^2$

$\Rightarrow \quad r = a$

किंतु दिया है, $\quad a = -3$

$\Rightarrow \quad r = -3$

अब, $\quad T_7 = ar^6 = (-3)(-3)^6 = (-3)^7 = -2187$

प्रश्न 5. अनुक्रम का कौन-सा पद

(i) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots; 128$ है? (ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots;\ 729$ है? (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots; \frac{1}{1\,9683}$ है?

गुणोत्तर श्रेढ़ी के nवें पद का सूत्र $T_n = ar^{n-1}$ का प्रयोग कर हम n का मान निकालेंगे।

हल (i) श्रेणी है, $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

यहाँ, $a = 2, r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

तथा $\quad T_n = 128$ (दिया है)

अब, $\quad T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 128 = 2(\sqrt{2})^{n-1} \Rightarrow 2^{\frac{n-1}{2}} = \frac{128}{2}$

$\Rightarrow \quad 2^{\frac{n-1}{2}} = 64 \Rightarrow 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^6$

दोनों ओर 2 के घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{n-1}{2} = 6 \Rightarrow n = 12 + 1 \Rightarrow n = 13$

(ii) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots$

यहाँ, $\quad a = \sqrt{3}, r = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, T_n = 729$ (दिया है)

अब, $\quad T_n = ar^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 729 = \sqrt{3}(\sqrt{3})^{n-1}$

$\Rightarrow \quad 729 = (\sqrt{3})^n \Rightarrow 3^{\frac{n}{2}} = 3^6$

दोनों ओर 3 के घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad \frac{n}{2} = 6 \Rightarrow n = 12$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

यहाँ, $\quad a = \frac{1}{3}, r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$$T_n = \frac{1}{19683}$$ (दिया है)

अब, $$T_n = ar^{n-1}$$

$$\frac{1}{19683} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{6561} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{8}$$

दोनों ओर (1/3) के घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad n-1=8 \Rightarrow n=8+1 \Rightarrow n=9$$

प्रश्न 6. x के किस मान के लिए संख्याएँ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं?

हम जानते हैं कि यदि तीन संख्याएँ a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, तब $b^2 = ac$

हल चूँकि $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, तब

$$\Rightarrow \quad x^2 = \left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{2}\right) \Rightarrow x^2 = \frac{2}{7} \times \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

निर्देश (प्र. सं. 7 - 10) निम्नलिखित प्रश्नों के प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पदों तक ज्ञात कीजिए।

(प्र. सं. 7 - 10) यहाँ, हम सूत्र $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r > 1$ या $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1$ का प्रयोग कर सरल करेंगे।

प्रश्न 7. 0.15, 0.015, 0.0015, ..., 20 पदों तक

हल यहाँ, $a = 0.15$, $r = \frac{0.015}{0.15} = \frac{15}{1000} \times \frac{100}{15}$

$$r = \frac{1}{10} < 1 \quad \text{तथा} \quad n = 20$$

अब, $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$\Rightarrow \quad S_{20} = \frac{0.15\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right]}{1-\frac{1}{10}} = \frac{0.15\left[1-\frac{1}{10^{20}}\right]}{\frac{10-1}{10}} = \frac{0.15 \times 10}{9}\left(1-\frac{1}{10^{20}}\right)$$

$$= \frac{15 \times 10}{900}\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^{20}\right] = \frac{1}{6}[1-(0.1)^{20}]$$

प्रश्न 8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots, n$ पदों तक

हल यहाँ, $a = \sqrt{7}, r = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7 \times 3}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3} > 1$

$\because$ $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \qquad (\because r > 1)$$

$\Rightarrow$ $$S_n = \frac{\sqrt{7}\,[(\sqrt{3})^n - 1]}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{7}\,[(3^{1/2})^n - 1]}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\,(\sqrt{3} + 1)(3^{n/2} - 1)}{3 - 1} \qquad [\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2}(\sqrt{3} + 1)(3^{n/2} - 1)$$

प्रश्न 9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots, n$ पदों तक (यदि $a \neq -1$)

हल यहाँ, $a = 1, r = -\frac{a}{1} = -a < 1$

$\therefore$ $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (\because r < 1)$$

$$S_n = \frac{1\{1 - (-a)^n\}}{1 - (-a)} = \frac{1 - (-a)^n}{1 + a}$$

प्रश्न 10. $x^3, x^5, x^7, \ldots, n$ पदों तक (यदि $x \neq \pm 1$)

हल यहाँ, $a = x^3, r = \frac{x^5}{x^3} = x^2$

$\because$ $$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (\because r < 1)$$

$\therefore$ $$S_n = \frac{x^3\,[1 - (x^2)^n]}{1 - x^2} = \frac{x^3\,(1 - x^{2n})}{1 - x^2}$$

प्रश्न 11. मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{11} (2 + 3^k)$

हल. $$\sum_{k=1}^{11} 2 + \sum_{k=1}^{11} 3^k = 2 \times 11 + (3^1 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{11}) \qquad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$$

$$= 22 + \frac{3(3^{11} - 1)}{3 - 1} = 22 + \frac{3(3^{11} - 1)}{2}$$

प्रश्न 12. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का योगफल $\frac{39}{10}$ है तथा उनका गुणनफल 1 है। सार्वानुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए।

यहाँ, हम गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ $\frac{a}{r}, a, ar$ लेकर दी गई शर्त का प्रयोग करेंगे।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी की तीन संख्याएँ $\frac{a}{r}$, a तथा ar हैं।

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $$\frac{a}{r} + a + ar = \frac{39}{10} \quad \ldots(i)$$

तथा $$\left(\frac{a}{r}\right) \times (a) \times (ar) = 1 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

समी (i) में $a = 1$ रखने पर, $$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10} \Rightarrow \frac{1}{r} + \frac{1}{1} + \frac{r}{1} = \frac{39}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + r + r^2}{r} = \frac{39}{10}$$

$$\Rightarrow 10 + 10r + 10r^2 = 39r$$

$$\Rightarrow 10r^2 + 10r - 39r + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 10r^2 - 29r + 10 = 0$$

अब, मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$\Rightarrow 10r^2 - 25r - 4r + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 5r(2r - 5) - 2(2r - 5) = 0$$

$$\Rightarrow (5r - 2)(2r - 5) = 0$$

$$\Rightarrow 5r - 2 = 0 \quad \text{तथा} \quad 2r - 5 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{5} \quad \text{तथा} \quad r = \frac{5}{2}$$

जब $a = 1$ तथा $r = \frac{2}{5}$, तब संख्याएँ हैं

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}, \ a = 1 \quad \text{तथा} \quad ar = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$$

जब $a = 1$ तथा $r = \frac{5}{2}$, तब संख्याएँ हैं

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}, \ a = 1 \quad \text{तथा} \quad ar = 1 \times \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$$

प्रश्न 13. गुणोत्तर श्रेढ़ी $3, 3^2, 3^3, \ldots$ के कितने पद आवश्यक हैं, ताकि उनका योगफल 120 हो जाए?

यहाँ, हम सूत्र $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, $r > 1$ का प्रयोग कर n का मान निकालेंगे।

हल यहाँ, $a = 3, r = 3, S_n = 120$

अब, $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$$

$$\Rightarrow \quad 120 = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$\Rightarrow \quad 120 = \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 120 \times 2 = 3(3^n - 1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{240}{3} = 3^n - 1$$

$$\Rightarrow \quad 3^n - 1 = 80 \quad \Rightarrow \quad 3^n = 80 + 1$$

$$\Rightarrow \quad 3^n = 81 \quad \Rightarrow \quad 3^n = 3^4$$

दोनों ओर 3 के घातों की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad n = 4$$

प्रश्न 14. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले तीन पदों का योग 128 है, तो गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद, सार्वानुपात तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

दिया है, $$a + ar + ar^2 = 16 \quad \ldots(i)$$

तथा $$ar^3 + ar^4 + ar^5 = 128 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) को समी (ii) से भाग करने पर, $\dfrac{a + ar + ar^2}{ar^3 + ar^4 + ar^5} = \dfrac{16}{128}$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(1 + r + r^2)}{ar^3(1 + r + r^2)} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{r}\right)^3$$

दोनों ओर घात 3 के आधार की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad r = 2$$

$r = 2$ समी (i) में रखने पर,

$$\Rightarrow \quad a + 2a + 4a = 16$$

$$\Rightarrow \quad 7a = 16$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{16}{7}$$

अब, $$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad (\because r = 2 > 1)$$

$$= \frac{\frac{16}{7}(2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{16}{7}(2^n - 1) \quad (\because r > 1)$$

$\therefore \qquad a = \frac{16}{7}, \; r = 2$

तथा $\qquad S_n = \frac{16}{7}(2^n - 1)$

प्रश्न 15. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद $a = 729$ तथा 7वाँ पद 64 है, तो S_7 ज्ञात कीजिए।

हल दिया है, $a = 729, T_7 = 64$

$\Rightarrow \qquad ar^{7-1} = 64$

$\Rightarrow \qquad 729r^6 = 64$

$\Rightarrow \qquad r^6 = \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

दोनों ओर घात 6 के आधार की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \qquad r = \frac{2}{3} < 1$

अब, $\qquad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\therefore \qquad S_7 = \frac{729\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^7\right]}{1-\frac{2}{3}} = \frac{729\left(1-\frac{2^7}{3^7}\right)}{\frac{1}{1}-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{729\left(\frac{1}{1}-\frac{128}{2187}\right)}{\frac{3-2}{3}} = \frac{729 \times 3}{1} \times \frac{2187-128}{2187}$$

$$= \frac{1}{1} \times 2059 = 2059$$

प्रश्न 16. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी को ज्ञात कीजिए। जिसके प्रथम दो पदों का योगफल – 4 है तथा 5 वाँ पद तृतीय पद का 4 गुना है।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

दिया है, $\qquad a + ar = -4 \qquad \ldots(i)$

तथा $\qquad T_5 = 4T_3$

$\Rightarrow \qquad ar^{5-1} = 4ar^{3-1}$

$\Rightarrow \qquad r^4 = 4r^2$

$\Rightarrow \qquad r^2 = 4$

$\Rightarrow \qquad r = \pm 2$

यदि $r = 2$, तब समी (i) से, $a + a(2) = -4$

$$3a = -4$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{4}{3}$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी है $-\frac{4}{3}, \left(-\frac{4}{3}\right)(2), \left(-\frac{4}{3}\right)(2)^2 \ldots -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, \ldots$

यदि $r = -2$, तब समी (i) से,

$$a + a(-2) = -4$$

$$\Rightarrow \quad -a = -4$$

$$\Rightarrow \quad a = 4$$

अतः गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $4, 4(-2), 4(-2)^2, \ldots, 4, -8, 16, \ldots$

प्रश्न 17. **यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का 4वाँ, 10वाँ तथा 16वाँ पद क्रमशः x, y तथा z है, तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।**

हल दिया है,

$$T_4 = x \Rightarrow ar^{4-1} = x \Rightarrow ar^3 = x \quad \ldots(i)$$

$$T_{10} = y \Rightarrow ar^{10-1} = y \Rightarrow ar^9 = y \quad \ldots(ii)$$

$$T_{16} = z \Rightarrow ar^{16-1} = z \Rightarrow ar^{15} = z \quad \ldots(iii)$$

समी (i) को समी (iii) से गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \quad ar^3 \times ar^{15} = x \times z$$

$$\Rightarrow \quad a^2 r^{3+15} = xz$$

$$\Rightarrow \quad a^2 r^{18} = xz$$

$$\Rightarrow \quad (ar^9)^2 = xz$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = xz \quad \text{[समी (ii) से]}$$

अतः x, y तथा z गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 18. **अनुक्रम 8, 88, 888, 8888,... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।**

निम्न प्रकार के प्रश्नों में (जैसे–5, 55, 555, ... तथा 7, 77, 777 ...) हम उभयनिष्ठ गुणनखंड को बाहर लेते हैं तथा इसके बाद प्रत्येक पद को 9 से गुणा तथा भाग कर गुणोत्तर श्रेढ़ी बना लेते हैं।

हल मान लीजिए $S = 8 + 88 + 888 + 8888 + \ldots + n$ पदों तक

$$\Rightarrow \quad S = 8(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}(9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + n \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{8}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots + n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{8}{9}[(10 + 100 + 1000 + \ldots + n \text{ पदों तक})$$
$$- (1 + 1 + 1 + \ldots + n \text{ पदों तक})]$$

$$= \frac{8}{9}\left[10\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] \quad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right] = \frac{8}{9} \times \frac{10}{9} \times (10^n - 1) - \frac{8}{9} \times n$$

$$= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8n}{9}$$

प्रश्न 19. **अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ के संगत पदों के गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिए।**

हल दिया हुआ अनुक्रम है, 2, 4, 8, 16, 32 ...(i)

तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) के संगत पदों को गुणा कर एक नया अनुक्रम बना लेते हैं।

256, 128, 64, 32, 16

मान लीजिए $S = 256 + 128 + 64 + 32 + 16$

यहाँ, $a = 256, r = \frac{1}{2}$

$$\therefore \text{ अभीष्ट योग } S = \frac{256\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 256 \times 2\left(1 - \frac{1}{2^5}\right) \qquad \left[\because S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, r < 1\right]$$

$$= 512 \times \left(1 - \frac{1}{32}\right) = 512\left(\frac{32 - 1}{32}\right)$$

$$= 16 \times 31 = 496$$

प्रश्न 20. **दिखाइए कि अनुक्रम $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ तथा $A, AR, AR^2, \ldots, AR^{n-1}$ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम गुणोत्तर श्रेढ़ी होती है तथा सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।**

हल दिया हुआ अनुक्रम है, $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ ...(i)

तथा $A, AR, AR^2, \ldots, AR^{n-1}$ ...(ii)

समी (i) तथा (ii) के संगत पदों को गुणा करने पर,

$$aA, ar\,AR, ar^2\,AR^2, \ldots, ar^{n-1}\,AR^{n-1}$$

$$\therefore \qquad \text{सार्वानुपात} = \frac{arAR}{aA} = rR$$

प्रश्न 21. ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए जो गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$

दिया है, तीसरा पद = पहला पद + 9

$$T_3 = a + 9 \Rightarrow \quad ar^2 = a + 9$$

$$ar^2 - a = 9 \quad \ldots(i)$$

पुनः दूसरा पद = चौथा पद + 18

$$T_2 = T_4 + 18 \quad \Rightarrow \quad ar = ar^3 + 18$$

$$\Rightarrow \quad ar - ar^3 = 18 \quad \ldots(ii)$$

समी (i) को समी (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{ar^2 - a}{ar - ar^3} = \frac{9}{18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(r^2 - 1)}{ar(1 - r^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{r}\frac{(1 - r^2)}{(1 - r^2)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad r = -2$$

समी (ii) में $r = -2$ रखने पर,

$$a(-2) - a(-2)^3 = 18$$

$$\Rightarrow \quad -2a + 8a = 18$$

$$\Rightarrow \quad 6a = 18 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $3, 3(-2), 3(-2)^2, 3(-3)^3, \ldots$

$$\Rightarrow \quad 3, -6, 12, -24, \ldots$$

प्रश्न 22. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का pवाँ, q वाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद A तथा सार्वानुपात R है।

दिया है, pवाँ पद $= T_p = a \quad \Rightarrow \quad AR^{p-1} = a \quad \ldots(i)$

q वाँ पद $= T_q = b \quad \Rightarrow \quad AR^{q-1} = b \quad \ldots(ii)$

r वाँ पद $= T_r = c \quad \Rightarrow \quad AR^{r-1} = c \quad \ldots(iii)$

अब, हमें सिद्ध करना है कि $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$

बायाँ पक्ष $= a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q}$

समी (i), (ii) तथा (iii) से a, b तथा c का मान रखने पर,

$$\text{बायाँ पक्ष} = (AR^{p-1})^{q-r}(AR^{q-1})^{r-p}(AR^{r-1})^{p-q}$$
$$= A^{q-r}R^{(p-1)(q-r)}A^{r-p}R^{(q-1)(r-p)}A^{p-q}R^{(r-1)(p-q)}$$
$$= A^{q-r+r-p+p-q}R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$
$$= A^0 R^{pq-pr-q+r+qr-pq+r+p+rp-rq-p+q}$$
$$= A^0 R^0 = 1 \times 1 = 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

इति सिद्धम्

> **नोट** *यहाँ पर गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद तथा सार्वानुपात क्रमशः A तथा R लेते हैं, क्योंकि a तथा r प्रश्न में दिया हुआ है।*

प्रश्न 23. यदि किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम तथा nवाँ पद क्रमशः a तथा b है एवं P, n पदों का गुणनफल हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 = (ab)^n$

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $A, AR, AR^2, AR^3, \ldots$

दिया है, पहला पद $A = a$ ...(i)

nवाँ पद $AR^{n-1} = b$ ...(ii)

अब, $P = n$ पदों का गुणनफल

$$\Rightarrow \quad P = A \times AR^1 \times AR^2 \times AR^3 \times \ldots \times n \text{ पदों तक}$$
$$P = A^{1+1+1+\ldots+n \text{ पदों तक}} R^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$$
$$P = A^n R^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \left[\because \text{प्रथम } n \text{ प्राकृत संख्याओं का योग} = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$P^2 = A^{2n} R^{n(n-1)}$$
$$\Rightarrow \quad P^2 = A^n A^n R^{n(n-1)} = A^n (AR^{n-1})^n$$
$$\Rightarrow \quad P^2 = a^n b^n \quad \text{[समी (i) तथा (ii) से]}$$
$$\Rightarrow \quad P^2 = (ab)^n$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 24. दिखाइए कि एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल तथा $(n+1)$वें पद से $(2n)$वें पद तक के पदों के योगफल का अनुपात $\frac{1}{r^n}$

यहाँ, हम गुणोत्तर श्रेढ़ी को $2n$ पदों तक लेते हैं।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है

$$\underbrace{ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5, \ldots, ar^{n-1}}_{n \text{ पदों तक}}, \quad \underbrace{ar^n, ar^{n+1}, \ldots, ar^{2n-1}}_{n \text{ पदों तक}}$$

अब, अभीष्ट अनुपात $= \dfrac{\text{प्रथम } n \text{ पदों का योग}}{(n+1)\text{वें पद से } (2n)\text{वें पदों का योग}}$

$$= \frac{\dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}}{\dfrac{ar^n (r^n - 1)}{r-1}} = \frac{1}{r^n}$$ इति सिद्धम्

प्रश्न 25. यदि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, तो दिखाइए कि

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

हल $\because$ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\therefore$ $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c} = r$ (मान लीजिए)

$\Rightarrow$ $b = ar, c = br, d = cr$

$\Rightarrow$ $b = ar, c = (ar)r, d = (br)r$

$\Rightarrow$ $b = ar, c = ar^2, d = br^2$

$\Rightarrow$ $b = ar, c = ar^2, d = (ar)r^2 = ar^3$ ...(i)

अब, हमें सिद्ध करना है कि

$$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$$

बायाँ पक्ष $= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$

$= (a^2 + a^2r^2 + a^2r^4)(a^2r^2 + a^2r^4 + a^2r^6)$

$= a^2(1 + r^2 + r^4)a^2 r^2 (1 + r^2 + r^4)$

$= a^4r^2(1 + r^2 + r^4)^2$

$= [a^2r(1 + r^2 + r^4)]^2$

$= (a^2r + a^2r^3 + a^2r^5)^2$

$= (a \cdot ar + ar \cdot ar^2 + ar^2 \cdot ar^3)^2$

$= (ab + bc + cd)^2$ [समी (i) से]

$=$ दायाँ पक्ष

प्रश्न 26. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 तथा 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बन जाए।

दो दी हुई संख्याओं के बीच संख्याएँ रखने पर हम सूत्र T_n का प्रयोग कर सार्वानुपात निकालेंगे।

हल मान लीजिए दो संख्याएँ a तथा b हैं, तब $3, a, b, 81$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में होंगी।

$\because$ nवाँ पद $T_n = AR^{n-1}$

$\therefore \quad 81 = 3R^{4-1}$

$\Rightarrow \quad R^3 = \dfrac{81}{3}$

$\Rightarrow \quad R^3 = 27 \Rightarrow R^3 = 3^3 \quad \Rightarrow \quad R = 3$

दोनों ओर घात 3 के आधार की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad a = AR = 3 \times 3 = 9, \quad b = AR^2 = 3 \times 3^2 = 27$

प्रश्न 27. n का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

हम जानते हैं कि दो संख्याएँ a तथा b के बीच समांतर माध्य $\sqrt{ab}$ होता है, हम इसे दी गई गुणोत्तर माध्य के बराबर रखकर n के लिए हल करेंगे। इस संबंध का प्रयोग कर इसे सरल करेंगे।

हल दिया है, $\quad \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \sqrt{ab}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}}{1}$

$\Rightarrow \quad a^{n+1}+b^{n+1} = (a^n+b^n)(a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow \quad a^{n+1}+b^{n+1} = a^{n+\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\, b^{n+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad a^{n+1}+b^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}\, b^{n+\frac{1}{2}} = 0$

$\Rightarrow \quad (a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{2}}) + (b^{n+1} - a^{\frac{1}{2}}\, b^{n+\frac{1}{2}}) = 0$

$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}}\, [a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}] - b^{n+\frac{1}{2}}\, [a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}] = 0$

$\Rightarrow \quad (a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = 0$

$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} = 0 \qquad \left(\because a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0\right)$

$\Rightarrow \quad a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^0$

दोनों ओर आधार (a/b) के घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad n + \dfrac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad n = -\dfrac{1}{2}$

प्रश्न 28. दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है, तो दिखाइए कि संख्याएँ $(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$ के अनुपात में हैं।

दी हुई शर्त लेने के बाद हम योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करेंगे।

अर्थात् $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

हल मान लीजिए संख्याएँ a तथा b हैं।

दिया है, $a+b=6\sqrt{ab}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{3}{1}$$

अब, योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{3+1}{3-1}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}=\frac{4}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$$

पुनः योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2+1+2\sqrt{2}}{2+1-2\sqrt{2}} \quad \left[\begin{array}{l} \because \ (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \\ \text{तथा } (a-b)^2=a^2+b^2-2ab \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a:b=(3+2\sqrt{2}):(3-2\sqrt{2})$$

प्रश्न 29. यदि A तथा G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमशः समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध कीजिए कि संख्याएँ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$

> यदि द्विघात समीकरण के मूल दिए हुए हैं, तब द्विघात समीकरण
> $$x^2 - (\text{मूलों का योग})\, x + \text{मूलों का गुणनफल} = 0$$

हल मान लीजिए संख्याएँ α तथा β हैं।

दिया है, मूलों का योग, $\frac{\alpha+\beta}{2} = A$ (समांतर माध्य)

$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = 2A$

तथा मूलों का गुणनफल $\quad \sqrt{\alpha\beta} = G$ (गुणोत्तर माध्य) $\Rightarrow \alpha\beta = G^2$

अब, द्विघात समीकरण जिनके मूल α तथा β हैं,

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2Ax + G^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2A \pm \sqrt{4A^2 - 4 \times 1 \times G^2}}{2 \times 1} \quad \left(\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{2A \pm 2\sqrt{A^2 - G^2}}{2}$$

$$= A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)} \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 30. यदि किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घंटे पश्चात् दोगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे, तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा n वें घंटों बाद क्या होगी?

> यहाँ, हम गुणोत्तर माध्य के सूत्र का प्रयोग करेंगे क्योंकि बैक्टीरिया प्रत्येक घंटे बहुल-गुणज में बढ़ती है।

हल कल्चर में उपस्थित बैक्टीरिया की संख्या एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का निर्माण करती है जिसका पहला पद $a = 30$ तथा सार्वानुपात $r = 2$

दूसरे घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया $= ar^2 = 30 \times (2)^2 = 120$ $\quad (\because T_n = ar^{n-1})$

चौथे घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया $= ar^4 = 30 \times (2)^4 = 30 \times 16 = 480$

nवें घंटे बाद उपस्थित बैक्टीरिया $= ar^n = 30 \times 2^n = (30)\cdot(2^n)$

प्रश्न 31. ₹ 500 धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 10 वर्षों बाद क्या हो जाएगी, ज्ञात कीजिए?

हल मान लीजिए A धनराशि, P मूलधन, r ब्याज की दर तथा t समय काल वर्षों में दिया हुआ है। तब, धनराशि A निम्न सूत्र से प्राप्त होता है। अर्थात्

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^t = 500\left(1+\frac{10}{100}\right)^{10}$$
$$= 500\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 500\,(1+0.1)^{10}$$
$$= 500 \times (1.1)^{10}$$

प्रश्न 32. **यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समांतर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 तथा 5 हैं, तो द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए।**

यदि द्विघात समीकरण के दो मूल दिए हुए हों, तब द्विघात समीकरण होती है,

x^2 – (मूलों का योग) x + मूलों का गुणनफल = 0

हल मान लीजिए द्विघात समीकरण के मूल α तथा β हैं, तब

(समांतर माध्य) $\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 8$ तथा (गुणोत्तर माध्य) $\sqrt{\alpha\beta} = 5$

$\Rightarrow$ $\alpha+\beta = 16$ तथा $\alpha\beta = 25$

यदि द्विघात समीकरण के मूल α तथा β दिए हुए हों, तब द्विघात समीकरण

x^2 – (मूलों का योग) x + (मूलों का गुणनफल) = 0

$\Rightarrow$ $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - 16x + 25 = 0$

प्रश्नावली 9.4

निर्देश (प्र. सं. 1 - 7) **निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।**

(प्र. सं. 1 - 7) जब हम किसी श्रेणी के n पदों का योग निकालते हैं, तब सर्वप्रथम nवाँ पद T_n निकालते हैं तथा योग $S = \Sigma T_n$ निकालने में निम्न सूत्र

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ तथा } \Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$ का प्रयोग करते हैं।

प्रश्न 1. $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \ldots$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है।

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \ldots$$

सर्वप्रथम, हम दी हुई श्रेणी को दो भागों में विभक्त करते हैं जो है, 1, 2, 3, 4, 5... तथा 2, 3, 4, 5,... दी हुई श्रेणी का nवाँ पद निकालने के लिए प्रत्येक भाग का nवाँ पद अलग-अलग निकालते हैं।

$T_n = (1, 2, 3, \ldots$ का nवाँ पद$) \times (2, 3, 4, \ldots$ का nवाँ पद$)$

$= [1 + (n-1)1] \times [2 + (n-1)1]$ $\quad [\because T_n = a + (n-1)d]$

$= (1 + n - 1)(2 + n - 1)$

$\Rightarrow \quad T_n = n(n+1)$

अब, $\quad S = \Sigma T_n = \Sigma (n^2 + n) = \Sigma n^2 + \Sigma n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \quad \left[\because \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + \frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{(2n+1+3)}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+4}{3}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

प्रश्न 2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है,

$$S = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$$

सर्वप्रथम हम दी हुई श्रेणी को तीन भागो में विभक्त करते हैं जो है। 1, 2, 3,... तथा 2, 3, 4, ... तथा 3, 4, 5, ... दी हुई श्रेणी का nवाँ पद निकालने के लिए प्रत्येक भाग का nवाँ पद अलग-अलग निकालते हैं।

अर्थात् $T_n = (1, 2, 3, \ldots$ का nवाँ पद$) \times (2, 3, 4 \ldots$ का nवाँ पद$) \times (3, 4, 5, \ldots$ का nवाँ पद$)$

$= [1 + (n-1)1][2 + (n-1)1][3 + (n-1)1] \quad [\because T_n = a + (n-1)d]$

$= (1 + n - 1)(2 + n - 1)(3 + n - 1)$

$\Rightarrow \quad T_n = n(n+1)(n+2) = n(n^2 + 2n + n + 2) = n(n^2 + 3n + 2)$

$\Rightarrow \quad T_n = n^3 + 3n^2 + 2n$

अब, $\quad S = \Sigma T_n = \Sigma (n^3 + 3n^2 + 2n)$

$= \Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + 2\Sigma n$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$\left[\because \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2},\ \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + (2n+1) + 2\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{1} + \frac{2}{1}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n^2 + n + 4n + 2 + 4}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4} = \frac{n(n+1)(n^2+2n+3n+6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)[n(n+2)+3(n+2)]}{4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

प्रश्न 3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है

$$S = 3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$$

सर्वप्रथम हम दी हुई श्रेणी को दो भागों में विभक्त करते हैं जो 3, 5, 7, ... तथा $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ है। दी हुई श्रेणी का nवाँ पद निकालने के लिए प्रत्येक भाग का nवाँ पद अलग-अलग निकालते हैं।

$$T_n = (3, 5, 7 \ldots \text{ का } n\text{वाँ पद}) \times (1, 2, 3 \ldots \text{ का } n\text{वाँ पद })^2$$

$$= [3 + (n-1)2][1 + (n-1)1]^2$$

$$= (3 + 2n - 2)(n)^2 = (2n+1)n^2 = 2n^3 + n^2$$

अब, $S = \Sigma T_n = 2\Sigma n^3 + \Sigma n^2$

$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \left[\because \Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \quad \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[2 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3n(n+1)+2n+1}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{6} \times (3n^2 + 3n + 2n + 1)$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2+5n+1)}{6}$$

प्रश्न 4. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \ldots.$$

यहाँ, हम दी हुई श्रेणी के हर को दो भागों में बाँटेंगे अर्थात्

$$T_n = \frac{1}{(1, 2, 3, \ldots \text{ का } n\text{वाँ पद}) \times (2, 3, 4, \ldots \text{ का } n\text{वाँ पद})}$$

$$= \frac{1}{[1 + (n-1)1][2 + (n-1)1]} \qquad [\because T_m = a + (m-1)d]$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}$$

$= \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$ (इस चरण पर ध्यान दें)

$= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

अब, $n = 1, 2, 3, 4 \dots$ रखने पर,

$$T_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$
$$T_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$T_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$T_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

अब, इन पदों को जोड़ने पर,

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$$
$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1}$$

$\Rightarrow$ $$S = \frac{n}{n+1}$$

नोट *जब दी हुई श्रेणी भिन्न में हो, तब हम सूत्र $\Sigma n, \Sigma n^2, \Sigma n^3$ का प्रयोग नहीं कर सकते।*

प्रश्न 5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + 20^2$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है,

$$S = 5^2 + 6^2 + 7^2 + \dots + 20^2$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 20^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$
$$= \frac{20 \times (20+1) \times (2 \times 20 + 1)}{6} - \frac{4(4+1)(2 \times 4 + 1)}{6}$$

$$\left[\because \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = \frac{17220}{6} - \frac{180}{6}$$
$$= \frac{17220 - 180}{6} = \frac{17040}{6} = 2840$$

प्रश्न 6. $3\times 8+6\times 11+9\times 14+\ldots$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है,

$$S=3\times 8+6\times 11+9\times 14+\ldots$$

$$T_n=(3, 6, 9\ldots \text{ का } n\text{वाँ पद})\times(8, 11, 14\ldots \text{ का } n\text{वाँ पद})$$

$$T_n=[3+(n-1)3][8+(n-1)3] \qquad [\because T_m=a+(m-1)\,d]$$

$$=(3+3n-3)(8+3n-3)$$

$$=3n(3n+5)=9n^2+15n$$

अब, $S=\Sigma T_n$

$$=\Sigma(9n^2+15n)=9\Sigma n^2+15\Sigma n$$

$$=\frac{9n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{15n(n+1)}{2} \qquad \left[\because \Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \Sigma n=\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{9(2n+1)}{3}+15\right]=\frac{n(n+1)}{2}[3(2n+1)+15]$$

$$=\frac{n(n+1)3(2n+1+5)}{2}=\frac{3n(n+1)(2n+6)}{2}=3n(n+1)(n+3)$$

प्रश्न 7. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots$

हल मान लीजिए दी हुई श्रेणी है,

$$S=1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots$$

यहाँ, प्रथम पद में 1 पद है, दूसरे पद में 2 पद हैं, तीसरे पद में 3 पद हैं इत्यादि। इसलिए दी हुई श्रेणी का nवाँ पद होगा

अर्थात् $T_n=1^2+2^2+\ldots.+n^2$

$$T_n=\Sigma n^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\Rightarrow$ $T_n=\dfrac{n(2n^2+n+2n+1)}{6}$

$\Rightarrow$ $T_n=\dfrac{n(2n^2+3n+1)}{6}$

$\Rightarrow$ $T_n=\dfrac{2n^3+3n^2+n}{6}$

अब, $S=\Sigma T_n=\dfrac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$

$$=\frac{1}{6}[2\Sigma n^3+3\Sigma n^2+\Sigma n]$$

$$= \frac{1}{6}\left[2\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\left\{\because \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}, \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{1} + \frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12} \times (n^2 + n + 2n + 1 + 1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(n^2 + 3n + 2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2 + 2n + n + 2)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+1)}{12} \quad \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

नोट *जब दी हुई श्रेणी के पद समूह में हों, तब nवाँ पद निकालने के लिए श्रेणी के योग के सूत्र का प्रयोग करेंगे।*

निर्देश (प्र. सं. 8 - 10) **निम्नलिखित प्रश्नों में प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका n वाँ पद दिया है।**

यहाँ, हम सूत्र $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}, \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ तथा $\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ का प्रयोग करेंगे।

प्रश्न 8. $n(n+1)(n+4)$

हल मान लीजिए $\quad T_n = n(n+1)(n+4)$

$$= n(n^2 + 4n + n + 4)$$

$$= n(n^2 + 5n + 4)$$

$$= n^3 + 5n^2 + 4n$$

अब, $\quad S = \Sigma T_n = \Sigma(n^3 + 5n^2 + 4n)$

$$= \Sigma n^3 + 5\Sigma n^2 + 4\Sigma n$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{5(2n+1)}{3} + \frac{4}{1}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3n(n+1) + 10(2n+1) + 24}{6}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n + 20n + 10 + 24)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + 23n + 34)}{12}$$

प्रश्न 9. $n^2 + 2^n$

हल मान लीजिए $T_n = n^2 + 2^n$

$\Rightarrow$ $S = \Sigma T_n = \Sigma(n^2 + 2^n)0 = \Sigma n^2 + \Sigma 2^n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2(2^n - 1)}{2-1} \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, r > 1\right]$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(2^n - 1)$$

नोट *जब श्रेणी में किसी पद की घात n हो, तब हम Σn का प्रयोग नहीं करेंगे अर्थात्* $\Sigma 2^n \neq 2^{\Sigma n}$

प्रश्न 10. $(2n-1)^2$

हल मान लीजिए $T_n = (2n-1)^2$

$\Rightarrow$ $T_n = 4n^2 + 1 - 4n$ $\quad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$

अब, $S = \Sigma T_n = \Sigma(4n^2 + 1 - 4n)$

$$= 4\Sigma n^2 + \Sigma 1 - 4\Sigma n$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} + n - \frac{4n(n+1)}{2} \qquad (\because \Sigma 1 = n)$$

$$= n\left[\frac{2(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{1}{1} - \frac{2(n+1)}{1}\right]$$

$$= n\left[\frac{2(2n^2 + n + 2n + 1) + 3 - 6(n+1)}{3}\right]$$

$$= \frac{n(4n^2 + 6n + 2 + 3 - 6n - 6)}{3}$$

$$= \frac{n(4n^2 - 1)}{3} = \frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$$

$[\because (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)]$

विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. **दर्शाइए कि किसी समांतर श्रेढ़ी के $(m+n)$वें तथा $(m-n)$वें पदों का योग mवें पद का दोगुना है।**

प्रश्नानुसार, हमें सिद्ध करना है,

$$T_{m+n} + T_{m-n} = 2T_m$$

हल अब, बायाँ पक्ष $= T_{m+n} + T_{m-n}$

$= a + (m+n-1)d + a + (m-n-1)d \qquad [\because T_n = a + (n-1)d]$

$= 2a + d\,(m+n-1+m-n-1) = 2a + d\,(2m-2)$

$= 2\,[a + d\,(m-1)] = 2\,T_m =$ दायाँ पक्ष   इति सिद्धम्

प्रश्न 2. **यदि किसी समांतर श्रेढ़ी की तीन संख्याओं का योग 24 है तथा उनका गुणनफल 440 है, तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।**

हल मान लीजिए तीन संख्याएँ $a-d, a, a+d$ हैं।

दिया हुआ है, संख्याओं का योग $= 24$

$\therefore \quad a - d + a + a + d = 24$

$\Rightarrow \quad 3a = 24 \Rightarrow a = 8$

तथा संख्याओं का गुणनफल $= 440$

$\therefore \quad (a-d)\,a\,(a+d) = 440$

$\Rightarrow \quad a(a^2 - d^2) = 440$

$\Rightarrow \quad 8(64 - d^2) = 440$

$\Rightarrow \quad 64 - d^2 = 55$

$\Rightarrow \quad d^2 = 64 - 55$

$\Rightarrow \quad d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3$

जब $a = 8$ तथा $d = 3$, तब संख्याएँ हैं,

$a - d = 8 - 3 = 5$

तथा $\quad a = 8$

तथा $\quad a + d = 8 + 3 = 11 \Rightarrow 5, 8, 11$

जब $a = 8$ तथा $d = -3$, तब संख्याएँ हैं,

$a - d = 8 + 3 = 11$

$a = 8$

$a + d = 8 - 3 = 5$

$\Rightarrow \quad 11, 8, 5$

अतः संख्याएँ हैं, 5, 8, 11 या 11, 8, 5

प्रश्न 3. **मान लीजिए कि किसी समांतर श्रेढ़ी के $n, 2n$ तथा $3n$ पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3 है, तो दिखाइए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$**

हल मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का पहला पद a तथा सार्वान्तर d है।

दिया है, $S_1 = n$ पदों का योग $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ ...(i)

$S_2 = 2n$ पदों का योग $= \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)d]$ ...(ii)

तथा $S_3 = 3n$ पदों का योग $= \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d]$ ...(iii)

अब, हमें सिद्ध करना है $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

अब, दायाँ पक्ष $= 3(S_2 - S_1)$

$= 3\left[\frac{2n}{2}\{2a + (2n-1)d\} - \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}\right]$ [समी (i) तथा (ii) से]

$= \frac{3n}{2}[2\{2a + (2n-1)d\} - \{2a + (n-1)d\}]$

$= \frac{3n}{2}[4a + 2(2n-1)d - 2a - (n-1)d]$

$= \frac{3n}{2}[(4a - 2a) + d(4n - 2 - n + 1)]$

$= \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d]$

$= S_3 =$ बायाँ पक्ष [समी (iii) से]

$\because$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 4. **200 तथा 400 के मध्य आने वाली उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाजित हों।**

हल 200 तथा 400 के मध्य आने वाली संख्याएँ जो 7 से विभाज्य है निम्न हैं

203, 210, 217, ..., 399

स्पष्ट है, ये संख्याएँ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

जहाँ, $a = 203, d = 7$ तथा $T_n = 399$

अब, $T_n = a + (n-1)d$

$\Rightarrow$ $399 = 203 + (n-1)7$

$\Rightarrow$ $(n-1)7 = 399 - 203$

$\Rightarrow$ $(n-1)7 = 196$

$\Rightarrow$ $n - 1 = \frac{196}{7}$

$\Rightarrow$ $n - 1 = 28$

$\Rightarrow$ $n = 28 + 1$

$$n = 29$$

अब, $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\therefore$ $$S_n = \frac{29}{2}[2 \times 203 + (29-1)7]$$

$$= \frac{29}{2}[406 + 28 \times 7]$$

$$= \frac{29}{2}[406 + 196]$$

$$= \frac{29}{2} \times 602 = 29 \times 301 = 8729$$

नोट *विद्यार्थियों को ध्यान देना चाहिए कि संख्याएँ 200 तथा 400 सम्मिलित नहीं हैं।*

प्रश्न 5. 1 से 100 तक आने वाले उन सभी पूर्णांकों का योगफल ज्ञात कीजिए जो 2 या 5 से विभाजित हों।

यहाँ, हम 2 तथा 5 से विभाजित संख्याओं का योग अलग-अलग निकालेंगे तथा इनके योगों को जोड़ने के पश्चात् 2 साथ ही साथ 5 से विभाजित अर्थात् (अर्थात् 2 तथा 5 का लघुत्तम समापवर्त्य) संख्याओं के योग को पहले वाले योग में से घटायेंगे।

हल 1 से 100 तक की संख्याएँ जो 2 से विभाज्य हों 2, 4, 6, 8, ... 100 हैं।
संख्याएँ 2, 4, 6, 8, ... 100 समांतर श्रेढ़ी में है, जहाँ $a = 2, d = 4 - 2 = 2$

$\therefore$ $$T_n = a + (n-1)d \Rightarrow 100 = 2 + (n-1)2$$

$\Rightarrow$ $$100 - 2 = (n-1)2 \Rightarrow 98 = (n-1)2$$

$\Rightarrow$ $$49 = n - 1 \Rightarrow n = 50$$

इसलिए 50 संख्याओं का योग,

$$S_{50} = \frac{50}{2}[2 \times 2 + (50-1)2] \quad \left[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}\right]$$

$$= 25[4 + 49 \times 2]$$

$$= 25[4 + 98] = 25 \times 102$$

$\Rightarrow$ $$S_{50} = 2550 \quad \text{...(i)}$$

अब, 1 से 100 तक की संख्याएँ, जो 5 से विभाज्य हों, हैं,

5, 10, 15, 20, ..., 100

ये सभी संख्याएँ समांतर श्रेढ़ी में हैं, जहाँ $a = 5, d = 10 - 5 = 5$

$\therefore$ $$T_n = a + (n-1)d$$

$$100 = 5 + (n-1)5$$

$\Rightarrow$ $$100 - 5 = (n-1)5$$

$\Rightarrow$ $$(n-1) = \frac{95}{5}$$

$\Rightarrow$ $$n - 1 = 19$$

$\Rightarrow \quad n = 19 + 1 = 20$

अब, $\quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$\Rightarrow \quad S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 5 + (20-1)5]$

$= 10(10 + 19 \times 5)$

$= 10(10 + 95) = 10(105)$

$\Rightarrow \quad S_{20} = 1050 \quad$ ...(ii)

अब, 1 से 100 तक की संख्याएँ, जो 10 से (अर्थात् 2 तथा 5 का लघुत्तम समापवर्तक) विभाज्य हों, हैं, 10, 20 , 30, ..., 100

ये सभी संख्याएँ समांतर श्रेढ़ी में हैं, जहाँ $a = 10, d = 20 - 10 = 10$ तथा $n = 10$

$\because \quad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$\therefore \quad S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 10 + (10-1)10]$

$= 5(20 + 9 \times 10) = 5(20 + 90)$

$= 5 \times 110 = 550 \quad$ ...(iii)

अतः 1 से 100 तक आने वाले सभी पूर्णांकों का योग जो 2 या 5 से विभाज्य हो

$= (2550 + 1050) - 550 \quad$ (समी (i), (ii) तथा (iii) से)

$= 3600 - 550 = 3050$

प्रश्न 6. दो अंकों की उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जिनको 4 से विभाजित करने पर शेषफल 1 हो।

हल दो अंकों की संख्याएँ जिन्हें 4 से विभाजित करने पर शेषफल 1 हो, तब प्रत्येक संख्या 4 के गुणज से 1 अधिक होगी

13, 17, 21, ..., 97

स्पष्ट है, ये सभी संख्याएँ समांतर श्रेढ़ी में हैं, जहाँ

$a = 13, d = 4, T_n = 97$

$\because \quad T_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad 97 = 13 + (n-1)4$

$\Rightarrow \quad 97 - 13 = (n-1)4$

$\Rightarrow \quad 84 = (n-1)4$

$\Rightarrow \quad 21 = n - 1$

$\Rightarrow \quad n = 21 + 1 = 22$

अब, $\quad S_{22} = \frac{22}{2}[2 \times 13 + (22-1)4]$

$= 11(26 + 21 \times 4) = 11(26 + 84)$

$= 11 \times 110 = 1210$

प्रश्न 7. सभी $x, y \in N$ के लिए $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ को संतुष्ट करता हुआ f एक ऐसा फलन है कि $f(1) = 3$ तथा $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

दिया हुआ फलन संबंध से सर्वप्रथम हम $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ इत्यादि का मान निकालेंगे तथा इन मानों को इनके योग अर्थात् 120 में रख देंगे।

हल दिया है, $$f(x+y) = f(x) f(y) \quad \ldots(i)$$

समी (i) में $x = y = 1$ रखने पर,

$$f(1+1) = f(1)f(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(2) = 3 \times 3 \quad [\because f(1) = 3]$$

$$\Rightarrow \quad f(2) = 9$$

समी (i) में $x = 2, y = 1$ रखने पर,

$$f(2+1) = f(2)f(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(3) = 9 \times 3 \quad [\because f(2) = 9, f(1) = 3]$$

$$\Rightarrow \quad f(3) = 27$$

समी (i) में $x = 3, y = 1$ रखने पर,

$$f(3+1) = f(3)f(1)$$

$$\Rightarrow \quad f(4) = 27 \times 3 \quad [\because f(3) = 27]$$

$$\Rightarrow \quad f(4) = 81$$

अब, $$\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$$

$$\Rightarrow \quad f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = 120$$

$$\Rightarrow \quad 3 + 9 + 27 + \ldots + n \text{ पदों तक} = 120$$

यहाँ, $a = 3, r = \frac{9}{3} = 3$

$$\because \quad \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = 120 \quad (\because r > 1)$$

$$\Rightarrow \quad 3(3^n - 1) = 120 \times 2$$

$$\Rightarrow \quad 3(3^n - 1) = 240$$

$$\Rightarrow \quad 3^n - 1 = \frac{240}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3^n - 1 = 80$$

$$\Rightarrow \quad 3^n = 80 + 1$$

दोनों ओर 3 की घात की तुलना करने पर,

$$\Rightarrow \quad 3^n = 81$$

$$\Rightarrow \quad 3^n = 3^4 \Rightarrow n = 4$$

प्रश्न 8. गुणोत्तर श्रेढ़ी के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्वानुपात क्रमशः 5 तथा 2 है। अंतिम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पद है। $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$

दिया है, $a = 5, r = 2$ तथा $S_n = 315$

$\therefore \quad 315 = \dfrac{5(2^n - 1)}{2-1} \Rightarrow \dfrac{315}{5} = 2^n - 1 \qquad \left[\because S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}, r > 1\right]$

$\Rightarrow \quad 2^n - 1 = 63 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 63 + 1 \Rightarrow 2^n = 64$

दोनों ओर 2 की घात की तुलना करने पर,

$\Rightarrow \quad 2^n = 2^6 \quad \Rightarrow \quad n = 6$

पुनः अंतिम पद के लिए,

$$T_n = ar^{n-1} = 5 \times (2)^{6-1} = 5 \times 2^5 = 5 \times 32 = 160$$

प्रश्न 9. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो, तो गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है,

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

दिया है, $\quad a = 1$ तथा $T_3 + T_5 = 90$

$\therefore \quad ar^2 + ar^4 = 90 \qquad (\because T_n = ar^{n-1})$

$\Rightarrow \quad r^2 + r^4 = 90 \qquad (\because a = 1)$

$\Rightarrow \quad r^4 + r^2 - 90 = 0$

अब, मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$\Rightarrow \quad r^4 + 10r^2 - 9r^2 - 90 = 0$

$\Rightarrow \quad r^2(r^2 + 10) - 9(r^2 + 10) = 0$

$\Rightarrow \quad (r^2 + 10)(r^2 - 9) = 0$

$\because \quad r^2 + 10 \neq 0 \Rightarrow r^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow \quad r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$

प्रश्न 10. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का योग 56 है। यदि हम क्रम से इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाएँ, तो हमें एक समांतर श्रेढ़ी प्राप्त होती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी में तीन संख्याएँ, a, ar, ar^2 है।

दिया है, $\quad a + ar + ar^2 = 56 \qquad \ldots(i)$

पुनः $a - 1, ar - 7, ar^2 - 21$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow \quad 2(ar - 7) = (a - 1) + (ar^2 - 21) \qquad (\because$ यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हों, तब $2b = a + c)$

$\Rightarrow \quad 2ar - 14 = a + ar^2 - 22$

$\Rightarrow \quad a + ar^2 - 2ar = -14 + 22$

$\Rightarrow \quad a + ar^2 - 2ar = 8 \quad \ldots(ii)$

समी (i) को समी (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{a + ar + ar^2}{a + ar^2 - 2ar} = \frac{56}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 + r + r^2}{1 + r^2 - 2r} = \frac{7}{1}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + r + r^2 = 7 + 7r^2 - 14r$$

$$\Rightarrow \quad 6r^2 - 15r + 6 = 0$$

3 से भाग देने पर,

$$\Rightarrow \quad 2r^2 - 5r + 2 = 0$$

अब मध्य पद विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$\Rightarrow \quad 2r^2 - (4 + 1)r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2r^2 - 4r - r + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2r(r - 2) - (r - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (r - 2)(2r - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = 2, \frac{1}{2}$$

यदि $r = 2$, तब समी (i) से,

$$a + 2a + 4a = 56$$

$$\Rightarrow \quad 7a = 56$$

$$a = 8$$

तब संख्याएँ हैं,

$$a = 8$$

$$ar = 8 \times 2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad ar^2 = 8 \times 4 = 32$$

$$8, 16, 32$$

यदि $r = \frac{1}{2}$, तब समी (i) से, $\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = 56$

$$\frac{4a + 2a + 1}{4} = 56$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7a}{4} = 56$$

$$\Rightarrow \quad a = 32$$

तब संख्याएँ हैं,

$$a = 32$$

$$ar = 32 \times \frac{1}{2} = 16$$

या $$ar^2 = 32 \times \frac{1}{4} = 8$$

$\Rightarrow$ $$32, 16, 8$$

अतः अभीष्ट संख्याएँ हैं, 8, 16, 32 या 32, 16, 8

प्रश्न 11. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों की संख्या सम है। यदि उसके सभी पदों का योगफल, विषम स्थान पर रखे पदों के योगफल का 5 गुना है, तो सार्वानुपात ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^{2n-2}, ar^{2n-1}$

जहाँ $a, ar^2, ar^4, ar^6, \ldots$ विषम स्थान पर रखे हैं तथा $ar, ar^3, ar^5, ar^7, \ldots$ सम स्थान पर रखे हैं।

दिया है, सभी पदों का योग = 5 × विषम स्थान पर रखे पदों का योगफल

अर्थात् $$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{2n-1} = 5 \times (a + ar^2 + ar^4 + \ldots + ar^{2n-2})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a(r^{2n} - 1)}{r - 1} = \frac{5a[(r^2)^n - 1]}{r^2 - 1} \qquad \left[\because S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{r^{2n} - 1}{r - 1} = \frac{5(r^{2n} - 1)}{(r - 1)(r + 1)}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{5}{r + 1} \Rightarrow r + 1 = 5 \Rightarrow r = 4$$

> **नोट** *विद्यार्थी को ध्यान देना चाहिए कि यदि गुणोत्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या 2n है अर्थात् सम है, तब इनमें n विषम पद तथा n सम पद होंगे।*

प्रश्न 12. एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम चार पदों का योगफल 56 है। अंतिम चार पदों का योगफल 112 है। यदि इसका प्रथम पद 11 है, तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए दी हुई समांतर श्रेढ़ी है, $a, a + d, a + 2d, \ldots\ldots$

दिया है, प्रथम चार पदों का योगफल = 56

अर्थात् $$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 56$$

$$\Rightarrow \quad a + a + d + a + 2d + a + 3d = 56$$

$$\Rightarrow \quad 4a + 6d = 56$$

$$\Rightarrow \quad 4 \times 11 + 6d = 56 \qquad (\because a = 11)$$

$$\Rightarrow \quad 6d = 56 - 44 = 12$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{12}{6} \Rightarrow d = 2$$

यदि अंतिम पद T_n है, तब अंतिम चार पदों का योगफल = 112

$$T_n + T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} = 112 \qquad [\because T_n = a + (n-1)d]$$

$\therefore \quad a+(n-1)d+a+(n-1-1)d+a+(n-2-1)d+a+(n-3-1)d=112$

$\Rightarrow \quad 4a+d(n-1+n-2+n-3+n-4)=112$

$\Rightarrow \quad 4\times 11+2(4n-10)=112 \qquad (\because a=11, d=2)$

$\Rightarrow \quad 44+8n-20=112$

$\Rightarrow \quad 8n=112-44+20$

$\Rightarrow \quad 8n=132-44$

$\Rightarrow \quad 8n=88$

$\Rightarrow \quad n=\frac{88}{8}=11$

अतः श्रेणी में कुल पदों की संख्या = 11

प्रश्न 13. यदि $\frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}=\frac{c+dx}{c-dx}$ $(x\neq 0)$ हो, तो दिखाइए कि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

यहाँ, हम योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करेंगे

अर्थात् $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

हल दिया है, $\quad \frac{a+bx}{a-bx}=\frac{b+cx}{b-cx}=\frac{c+dx}{c-dx}$

योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{a+bx+a-bx}{a+bx-(a-bx)}=\frac{b+cx+b-cx}{b+cx-(b-cx)}=\frac{c+dx+c-dx}{c+dx-(c-dx)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2a}{2bx}=\frac{2b}{2cx}=\frac{2c}{2dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{bx}=\frac{b}{cx}=\frac{c}{dx}$$

प्रत्येक पद को x से गुणा करने पर,

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

इसलिए, a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

प्रश्न 14. किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी में S, n पदों का योग, P उनका गुणनफल तथा R उनके व्युत्क्रमों का योग हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2R^n=S^n$

हल मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी है, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$

दिया है, $\quad S=n$ पदों का योग $=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}$

$$=\frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad (\text{यदि } r>1) \qquad \ldots(\text{i})$$

तथा $R = n$ पदों के व्युत्क्रमों का योग

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + \ldots + \frac{1}{ar^{n-1}} \quad \left(\frac{1}{r} < 1\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left[1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{r^n}\right] \times \frac{1}{\frac{r-1}{r}}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{r^n - 1}{r^n}\right] \times \frac{r}{r-1}$$

$\Rightarrow$ $$R = \frac{(r^n - 1)r}{ar^n(r-1)} \quad \ldots(ii)$$

तथा $P = n$ पदों का गुणनफल $= a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times \ldots \times ar^{n-1}$

$$= a^{1+1+1+\ldots+n \text{ पदों तक}} r^{1+2+3+\ldots+(n-1) \text{ पदों तक}}$$

$$= a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \left[\because \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ $$P^2 = a^{2n} r^{n(n-1)} \quad \ldots(iii)$$

अब, हमें सिद्ध करना है, $P^2 R^n = S^n$

या $$P^2 = \frac{S^n}{R^n} \text{ या } P^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \left(\frac{S}{R}\right)^n = \left[\frac{a(r^n - 1)}{r-1} \times \frac{ar^n(r-1)}{(r^n-1)r}\right]^n \quad \text{[समी (i) तथा (ii) से]}$$

$$= [a^2 r^n r^{-1}]^n = (a^2 r^{n-1})^n = [a^{2n} r^{n(n-1)}]$$

$$= P^2 = \text{बायाँ पक्ष} \quad \text{[समी (iii) से]}$$

इति सिद्धम्

नोट *विद्यार्थियों को ध्यान देना चाहिए कि यदि S में $r < 1$ लेते हैं, तब R में $r > 1$ लेंगे।*

प्रश्न 15. किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ, q वाँ तथा rवाँ पद क्रमशः a, b तथा c हैं, तो सिद्ध कीजिए

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$$

हल मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी है, $A, A + D, A + 2D, A + 3D, \ldots\ldots$

दिया है, pवाँ पद $= A + (p-1)D = a \quad \ldots(i)$

qवाँ पद $= A + (q-1)D = b \quad \ldots(ii)$

rवाँ पद $= A + (r-1)D = c \quad \ldots(iii)$

अब, हमें सिद्ध करना है $(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$

$$\text{बायाँ पक्ष} = (q-r)a+(r-p)b+(p-q)c \quad \ldots\text{(iv)}$$

समी (i), (ii) तथा (iii) से क्रमशः a, b, c का मान लेकर समी (iv) में रखने पर,

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष} &= (q-r)[A+(p-1)D]+(r-p)[A+(q-1)D]+(p-q)[A+(r-1)D]\\ &= (q-r)A+(q-r)(p-1)D+(r-p)A+(r-p)(q-1)D\\ &\qquad +(p-q)A+(p-q)(r-1)D\\ &= A(q-r+r-p+p-q)+D[(q-r)(p-1)+(r-p)(q-1)\\ &\qquad +(p-q)(r-1)]\\ &= A(0)+D(qp-q-rp+r+rq-r-pq+p+pr-p-qr+q)\\ &= 0+0=0=\text{दायाँ पक्ष}\end{aligned}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

> **नोट** *समांतर श्रेढ़ी का पहला पद a के स्थान पर A लेते हैं क्योंकि p वाँ पद a दिया हुआ है। विद्यार्थियों को इसे समांतर श्रेणी मानते समय ध्यान में रखना चाहिए।*

प्रश्न 16. **यदि $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ समांतर श्रेढ़ी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं।**

हम समांतर श्रेढ़ी के सारे गुणों को ध्यान में रखते हुए इस प्रश्न को हल करेंगे।

हल दिया है, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow$ $a\left(\frac{b+c}{bc}\right), b\left(\frac{a+c}{ac}\right), c\left(\frac{b+c}{ab}\right)$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow$ $\frac{ab+ac}{bc}, \frac{ba+bc}{ac}, \frac{cb+ca}{ab}$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

प्रत्येक पद में 1 जोड़ने पर,

$\Rightarrow$ $\frac{ab+ac}{bc}+1, \frac{ba+bc}{ac}+1, \frac{cb+ca}{ab}+1$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow$ $\frac{ab+ac+bc}{bc}, \frac{ba+bc+ac}{ac}, \frac{bc+ac+ab}{ab}$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

प्रत्येक पद को $ab+bc+ac$ से भाग करने पर,

$\Rightarrow$ $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab}$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

प्रत्येक पद को abc से गुणा करने पर,

$\Rightarrow$ $\frac{abc}{bc}, \frac{abc}{ac}, \frac{abc}{ab}$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow$ a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं। इति सिद्धम्

प्रश्न 17. यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n) \text{ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।}$$

हम जानते हैं कि यदि तीन संख्याएँ a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, तब $b^2 = ac$

इस परिणाम का प्रयोग कर सत्यापित करेंगे।

हल $\because a, b, c, d$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow \quad b = ar, c = ar^2, d = ar^3 \quad \ldots(i)$

अब, हमें सिद्ध करना है $a^n + b^n, b^n + c^n, c^n + d^n$ गुणोत्तर श्रढ़ी में हैं।

$\Rightarrow \quad (b^n + c^n)^2 = (a^n + b^n)(c^n + d^n)$

दायाँ पक्ष $= (a^n + b^n)(c^n + d^n)$

$= (a^n + a^n r^n) \times (a^n r^{2n} + a^n r^{3n})$ [समी (i) से]

$= a^n(1 + r^n) a^n r^{2n}(1 + r^n)$

$= a^{2n} r^{2n}(1 + r^n)^2 = [a^n r^n (1 + r^n)]^2 = (a^n r^n + a^n r^{2n})^2$

$= [(ar)^n + (ar^2)^n]^2 = (b^n + c^n)^2$ [समी (i) से]

$=$ बायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=$ दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 18. यदि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a तथा b हैं तथा $x^2 - 12x + q = 0$, के मूल c तथा d हैं, जहाँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में हैं। सिद्ध कीजिए कि $(q + p) : (q - p) = 17 : 15$.

यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α तथा β हैं।

तब, मूलों का योग $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ तथा मूलों का गुणनफल $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

हल दिया है, समीकरण $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a तथा b हैं।

$\therefore$ मूलों का योग, $\quad a + b = -\frac{(-3)}{1} = 3$

$\Rightarrow \quad a + b = 3 \quad \ldots(i)$

तथा मूलों का गुणनफल, $\quad ab = p \quad \ldots(ii)$

पुनः दिया है, समीकरण $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c तथा d हैं।

मूलों का योग, $\quad c + d = -\frac{(-12)}{1} = 12$

$\Rightarrow \quad c + d = 12 \quad \ldots(iii)$

तथा मूलों का गुणनफल, $\quad cd = q \quad \ldots(iv)$

पुनः यह दिया हुआ है कि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow \quad b = ar, c = ar^2$ तथा $d = ar^3$

इन मानों को समी (i) तथा (iii) में रखकर समी (i) को समी (iii) से भाग करने पर,

$$\frac{a+ar}{ar^2+ar^3}=\frac{3}{12} \Rightarrow \frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad r^2=4$$

$$\Rightarrow \quad r=\pm 2$$

पुन: समी (i) से,

$$a+ar=3 \Rightarrow a+2a=3 \qquad (\because r=2)$$

$$\Rightarrow \quad 3a=3 \Rightarrow a=1$$

अत: गुणोत्तर श्रेढ़ी है

$$a=1, \quad b=ar=1\times 2=2, \quad c=ar^2=1\times 2^2=4, \; d=ar^3=1\times 2^3=8$$

समी (ii) से, $\quad p=ab=1\times 2=2$

समी (iv) से, $\quad q=cd=4\times 8=32$

$$\therefore \quad \frac{q+p}{q-p}=\frac{32+2}{32-2}=\frac{34}{30}=\frac{17}{15}$$

अत: $\quad (q+p):(q-p)=17:15$

पुन: समी (i) से, $\quad a+ar=3 \qquad (\because r=-2)$

$\Rightarrow \quad a-2a=3 \Rightarrow a=-3$

अत: गुणोत्तर श्रेढ़ी है $\quad a=-3, \quad b=ar=(-3)(-2)=6$

$$c=ar^2=(-3)(-2)^2=-12$$

$$d=ar^3=(-3)(-2)^3=24$$

समी (ii) से, $\quad p=ab=(-3)\cdot(+6)=-18$

समी (iv) से, $\quad q=cd=(-12)(24)=-288$

$$\therefore \quad \frac{q+p}{q-p}=\frac{-288-18}{-288+18}=\frac{-306}{-270}=\frac{17}{15}$$

अत: $\quad (q+p):(q-p)=17:15$

प्रश्न 19. **दो धनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य का अनुपात $m:n$ है। दर्शाइए कि $a:b=(m+\sqrt{m^2-n^2}):(m-\sqrt{m^2-n^2})$**

हल मान लीजिए संख्याएँ a तथा b के बीच समांतर माध्य A है तथा a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य G है।

तब, $A=\frac{a+b}{2}$ तथा $G=\sqrt{ab}$

दिया है, $\quad A:G=m:n$

अर्थात् $\frac{A}{G}=\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{m}{n}$

योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{m+n}{m-n} \Rightarrow \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{ab}}=\frac{m+n}{m-n}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{m+n}{m-n} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$$

पुनः योगांतर निष्पत्ति का प्रयोग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

दोनों ओर का वर्ग करने पर,

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n})^2}{(\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n})^2} \quad \left[\begin{array}{l}\because (a+b)^2=a^2+b^2+2ab \\ (a-b)^2=a^2+b^2-2ab\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{m+n+m-n+2\sqrt{m+n}\sqrt{m-n}}{m+n+m-n-2\sqrt{m+n}\sqrt{m-n}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{2m+2\sqrt{m^2-n^2}}{2m-2\sqrt{m^2-n^2}} \quad [\because (a+b)(a-b)=a^2-b^2]$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}$$

$$\Rightarrow a:b=(m+\sqrt{m^2-n^2}):(m-\sqrt{m^2-n^2})$$

इति सिद्धम्

प्रश्न 20. यदि a, b तथा c समांतर श्रेढ़ी में हैं b, c तथा d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं तथा $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ तथा $\frac{1}{e}$ समांतर श्रेढ़ी में है, तो सिद्ध कीजिए कि a, c तथा e गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

हल दिया है, a, b तथा c समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$$\Rightarrow 2b=a+c \quad \text{...(i)}$$

पुनः b, c तथा d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

$$\Rightarrow c^2=bd \quad \text{...(ii)}$$

इसी प्रकार, $\frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ तथा $\frac{1}{e}$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\Rightarrow \qquad \frac{2}{d} = \frac{1}{c} + \frac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{d} = \frac{e+c}{ce}$

$\Rightarrow \qquad d = \frac{2ce}{c+e}$ ...(iii)

समी (i) तथा (iii) से b, d का मान समी (ii) में रखने पर,

$$c^2 = \left(\frac{a+c}{2}\right) \times \left(\frac{2ce}{c+e}\right) \Rightarrow c^2 = \frac{a+c}{2} \times \frac{2ce}{c+e}$$

$\Rightarrow \qquad c^2(c+e) = (a+c)ce$

$\Rightarrow \qquad c(c+e) = (a+c)e \quad \Rightarrow \quad c^2 + ce = ae + ce$

$\Rightarrow \qquad c^2 = ae$

इसलिए a, c तथा e गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

प्रश्न 21. **निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।**

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots$

इस प्रकार के प्रश्नों में (जैसे–$a, aa, aaa, \ldots$) हमेशा उभयनिष्ठ गुणनखंड बाहर लेकर गुणोत्तर श्रेढ़ी में बनाने के लिए प्रत्येक पद को 9 से गुणा तथा भाग करते हैं।

हल (i) मान लीजिए $S = 5 + 55 + 555 + \ldots + n$ पदों तक

$= 5(1 + 11 + 111 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{5}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots + n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[(10 + 100 + 1000 + \ldots + n$ पदों तक)

$- (1 + 1 + 1 + \ldots + n$ पदों तक)]

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$ $\left[\because \text{ गुणोत्तर श्रेढ़ी का योग } = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1\right]$

$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$ $(\because \Sigma 1 = n)$

(ii) मान लीजिए $S = 0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots + n$ पदों तक

$S = 6(0.1 + 0.11 + 0.111 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{6}{9}(0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots + n$ पदों तक)

$= \frac{2}{3}\left(\frac{9}{10} + \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} + \ldots + n \text{ पदों तक}\right)$

$= \frac{2}{3}\left[\left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(1 - \frac{1}{100}\right) + \left(1 - \frac{1}{1000}\right) + \ldots + n \text{ पदों तक}\right]$

$$=\frac{2}{3}\left[(1+1+1+\ldots+n \text{ पदों तक})-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots+n \text{ पदों तक}\right)\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[n-\frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}}\right] \qquad \left[\because \text{ गुणोत्तर श्रेढ़ी का योग} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \cancel{r<1}\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[n-\frac{\frac{1}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{\frac{9}{10}}\right]=\frac{2}{3}\left[n-\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}\right]$$

प्रश्न 22. श्रेणी का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए

$$2\times4+4\times6+6\times8+\ldots+n \text{ पदों तक}$$

हल दी हुई श्रेणी है, $2\times4+4\times6+6\times8+\ldots+n$ पदों तक

यहाँ, हम दी हुई श्रेणी को दो भागों में विभक्त करते हैं जो 2, 4, 6,... तथा 4, 6, 8, ... हैं। दी हुई श्रेणी का nवाँ पद निकालने के लिए प्रत्येक भाग का nवाँ पद अलग-अलग निकालते हैं।

$T_n =$ (2, 4, 6 ... का nवाँ पद) $\times$ (4, 6, 8, ... का nवाँ पद)

$= [2+(n-1)2][4+(n-1)2]$ $\qquad [\because T_n = a+(n-1)d]$

$= (2+2n-2)(4+2n-2) = 2n(2n+2)$

$n=20$ रखने पर, $T_{20} = 2\times20(2\times20+2) = 40(40+2) = 40\times42 = 1680$

प्रश्न 23. श्रेणी $3+7+13+21+31+\ldots$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

यहाँ, हम अंतर विधि का प्रयोग करेंगे अर्थात् यदि एक श्रेणी इस प्रकार है कि जिसके दो क्रमागत पदों का अंतर या तो समांतर श्रेढ़ी या गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, तब हम इसका n वाँ पद अंतर विधि द्वारा निकालते हैं एवं इसका योग सूत्र $\Sigma n, \Sigma n^2$ तथा Σn^3 का प्रयोग कर निकालते हैं।

हल मान लीजिए $\qquad S = 3+7+13+21+\ldots+T_n$

$$S = \quad 3+7+13+\ldots+T_n$$

$$0 = (3+4+6+8+\ldots\ldots+n \text{ पदों तक})-T_n$$

$\Rightarrow \qquad T_n = 3+[4+6+8+\ldots(n-1) \text{ पदों तक}]$

$= 3+\frac{n-1}{2}[2\times4+(n-1-1)2] \qquad \left[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\right]$

(यहाँ, पदों की संख्या $=n-1$)

$= 3+\frac{n-1}{2}[8+(n-2)2]$

$$= 3 + \frac{n-1}{2}(2n+4) = 3 + \frac{(n-1)}{2} \times 2(n+2)$$

$$= 3 + (n-1)(n+2) = 3 + n^2 + 2n - n - 2$$

$$\Rightarrow \quad T_n = n^2 + n + 1$$

अब, $S = \Sigma T_n = \Sigma(n^2 + n + 1) = \Sigma n^2 + \Sigma n + \Sigma 1$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= n\left(\frac{2n^2 + n + 2n + 1}{6} + \frac{n+1}{2} + \frac{1}{1}\right)$$

$$\left[\because \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}, \Sigma 1 = n\right]$$

$$= n\left(\frac{2n^2 + 3n + 1 + 3n + 3 + 6}{6}\right)$$

$$= n\left(\frac{2n^2 + 6n + 10}{6}\right) = \frac{2n(n^2 + 3n + 5)}{6} = \frac{n(n^2 + 3n + 5)}{3}$$

प्रश्न 24. यदि S_1, S_2, S_3 क्रमशः प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग, उनके वर्गों का योग तथा घनों का योग है, तो सिद्ध कीजिए कि $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$

यहाँ, हम सूत्र $\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ तथा $\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ का प्रयोग करेंगे।

हल दिया है, S_1 = प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग = Σn

$$\Rightarrow \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots(i)$$

तथा S_2 = प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग = Σn^2

$$\Rightarrow \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \ldots(ii)$$

तथा S_3 = प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग = Σn^3

$$\Rightarrow \quad S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \ldots(iii)$$

अब, हमें सिद्ध करना है कि $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$

दायाँ पक्ष $= S_3(1 + 8S_1)$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \left[1 + 8 \times \frac{n(n+1)}{2}\right] \quad \text{[समी (i) तथा (iii) से]}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 [1 + 4n(n+1)] = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 (4n^2 + 4n + 1)$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 (2n+1)^2$$

9 से गुणा तथा भाग करने पर,

$$= 9 \times \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \times \frac{(2n+1)^2}{9} = 9\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]^2$$

$$= 9 \times S_2^2 = 9S_2^2 \qquad \text{[समी (ii) से]}$$

$$= \text{बायाँ पक्ष}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष इति सिद्धम्

प्रश्न 25. निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों तक योग ज्ञात कीजिए

$$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3 + 2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \ldots$$

दी हुई श्रेणी के n पदों का योग निकालने के लिए हम अंश तथा हर के पदों का योग क्रमशः निकालेंगे।

हल $$T_n = \frac{\text{अंश का } n\text{वाँ पद}}{\text{हर का } n\text{वाँ पद}} = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{1+3+5+\ldots + n \text{ पदों तक}}$$

$$= \frac{\Sigma n^3}{\frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1)2]} \qquad \left[\because S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \quad \Sigma n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\right]$$

$$= \frac{\Sigma n^3}{\frac{n}{2}(2 + 2n - 2)} = \frac{\Sigma n^3}{\frac{n}{2} \times 2n}$$

$$\Rightarrow \quad T_n = \frac{\Sigma n^3}{n^2} = \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{n^2} = \frac{n^2 (n+1)^2}{4n^2}$$

$$\Rightarrow \quad T_n = \frac{1}{4}(n+1)^2 \quad \Rightarrow \quad T_n = \frac{1}{4}(n^2 + 1 + 2n)$$

$$\Rightarrow \quad S = \Sigma T_n = \frac{1}{4}\Sigma(n^2 + 1 + 2n) = \frac{1}{4}(\Sigma n^2 + \Sigma 1 + 2\Sigma n)$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n + \frac{2 \times n(n+1)}{2}\right] \qquad \left[\because \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}, \Sigma 1 = n\right]$$

$$= \frac{n}{4}\left[\frac{2n^2 + n + 2n + 1}{6} + 1 + n + 1\right] = \frac{n}{4}\left[\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} + \frac{n+2}{1}\right]$$

$$= \frac{n}{4}\left(\frac{2n^2 + 3n + 1 + 6n + 12}{6}\right)$$

$$= \frac{n}{24}(2n^2 + 9n + 13)$$

प्रश्न 26. दर्शाइए कि $\dfrac{1\times 2^2 + 2\times 3^2 + ...+ n\times(n+1)^2}{1^2\times 2 + 2^2\times 3 + ...+ n^2\times(n+1)}\ \dfrac{3n+5}{3n+1}$

दी हुई श्रेणी का योग निकालने के लिए, हम अंश तथा हर का अलग-अलग योग निकालेंगे। मान लीजिए T_n तथा T_n' क्रमशः अंश तथा हर के nवाँ पद क्रमशः है एवं S_n तथा S_n' क्रमशः अंश तथा हर के n पदों का योग है।

हल अंश के लिए, $T_n = n(n+1)^2 = n(n^2+1+2n) = n^3+2n^2+n$

$$\Rightarrow \quad S_n = \Sigma T_n = \Sigma(n^3+2n^2+n)$$

$$= \Sigma n^3 + 2\Sigma n^2 + \Sigma n$$

$$\left[\because \Sigma n^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2, \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(2n+1)}{3} + \frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{3n(n+1)+4(2n+1)+6}{6}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{3n^2+3n+8n+4+6}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2+11n+10)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+6n+5n+10)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)[3n(n+2)+5(n+2)]}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12} \qquad \ldots\text{(i)}$$

पुनः हर के लिए,

मान लीजिए $\qquad T_n' = n^2(n+1) = n^3+n^2$

अब, $S_n' = \Sigma T_n' = \Sigma(n^3+n^2) = \Sigma n^3 + \Sigma n^2$

$$\left\{\because \Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2, \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2+3n+4n+2)}{12} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2+6n+n+2)}{12} = \frac{n(n+1)[3n(n+2)+1(n+2)]}{12}$$

$$T_n' = \frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{12} \qquad \ldots\text{(ii)}$$

अतः श्रेढ़ी का अभीष्ट योग है,

$$\therefore \qquad \frac{T_n}{T'_n} = \frac{\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}}{\dfrac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{12}} \qquad \text{[समी (i) तथा (ii) से]}$$

$$= \frac{3n+5}{3n+1} \qquad \text{इति सिद्धम्}$$

प्रश्न 27. कोई किसान एक पुराने ट्रैक्टर को ₹ 12000 में खरीदता है। वह ₹ 6000 का नकद भुगतान करता है और शेष राशि को ₹ 500 की वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 12% वार्षिक ब्याज भी देता है। किसान को ट्रैक्टर की कुल कितनी कीमत देनी पड़ेगी?

यहाँ, हम प्रत्येक वर्ष सरल ब्याज का मान निम्न सूत्र

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

द्वारा निकालेंगे तथा इसके बाद हम ट्रैक्टर की कुल लागत सभी को जोड़कर निकालेंगे।

हल ट्रैक्टर की कीमत = ₹ 12000

नकद भुगतान = ₹ 6000

शेष राशि = ₹ 6000

$$\text{पहली किस्त पर ब्याज} = \frac{6000 \times 12 \times 1}{100} \qquad \left(\because I = \frac{P \times R \times T}{100}\right)$$

$$= ₹\ 720$$

अब, भुगतान न की गई राशि = 6000 − 500 = ₹ 5500

$$\text{दूसरी किस्त पर ब्याज} = \frac{5500 \times 12 \times 1}{100} = ₹\ 660$$

पुनः भुगतान न की गई राशि = 5500 − 500 = ₹ 5000

$$\text{तीसरी किस्त पर ब्याज} = \frac{5000 \times 12 \times 1}{100} = ₹\ 600$$

किसान द्वारा भुगतान किया गया कुल ब्याज = 720 + 660 + 600 + ...+ 12 पदों तक

जो समांतर श्रेढ़ी में है तथा $a = 720, d = 660 - 720 = -60$

$$\text{इसलिए, कुल ब्याज} = \frac{12}{2}[2 \times 720 + (12-1)(-60)]$$

$$= 6(1440 - 11 \times 60) = 6(1440 - 660) = 6 \times 780 = ₹\ 4680$$

अतः कुल राशि या वास्तविक राशि = 12000 + 4680 = ₹ 16680

प्रश्न 28. शमशाद अली ₹ 22000 में एक स्कूटर खरीदता है। वह ₹ 4000 नकद देता है तथा शेष राशि को ₹ 1000 वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 10% वार्षिक ब्याज भी देता है। उसे स्कूटर के लिए कितनी राशि चुकानी पड़ेगी?

हल स्कूटर की कीमत = ₹ 22000

नकद भुगतान = ₹ 4000, शेष भुगतान = ₹ 18000

अब, पहली किस्त पर ब्याज $= \dfrac{18000 \times 10 \times 1}{100} =$ ₹ 1800 $\left(\because I = \dfrac{P \times R \times T}{100}\right)$

भुगतान न की गई राशि = 18000 − 1000 = 17000

दूसरी किस्त पर ब्याज $= \dfrac{17000 \times 10 \times 1}{100} =$ ₹ 1700

भुगतान न की गई राशि = 17000 − 1000 = 16000

तीसरी किस्त पर ब्याज $= \dfrac{16000 \times 10 \times 1}{100} =$ ₹ 1600

....

....

∴ शमशाद द्वारा भुगतान किया गया कुल ब्याज = 1800 + 1700 + 1600 + ...+ 18 पदों तक

जो एक समांतर श्रेढ़ी में है तथा $a = 1800, d = 1700 - 1800 = -100$

इसलिए कुल ब्याज $= \dfrac{18}{2}[2 \times 1800 + (18-1)(-100)]$

[∵ समांतर श्रेढ़ी का योग $= S_n = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$]

$= 9(3600 - 1700) = 9 \times 1900 = 17100$

अतः कुल राशि या वास्तविक राशि = 22000 + 17100 = ₹ 39100

प्रश्न 29. एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे व्यक्तियों को भेजने पर निर्देश देता है तथा उनसे यह भी करने को कहता है कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस शृंखला को जारी रखे। यह कल्पना करके कि शृंखला न टूटे, तो 8वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च होगा जबकि एक पत्र का डाक खर्च 50 पैसे है।

हल सर्वप्रथम एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को चार पत्र भेजता है, तब उन चार व्यक्तियों द्वारा जो दूसरे व्यक्ति को प्रत्येक चार-चार पत्र भेजते हैं अर्थात् कुल $4 \times 4 = 16$ पत्र भेजते हैं।

इसी प्रकार, अगले चरण में, $4 \times 4 \times 4 = 64$ पत्र भेजे जाते हैं।

इस प्रकार, एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बनेगी।

अर्थात् 4, 16, 64, 256,...

जहाँ, $a = 4$ तथा $r = 4$

अब, 8वें पत्रों के समूह तक कुल संख्या

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_8 = \frac{4(4^8 - 1)}{4-1} \Rightarrow S_8 = \frac{4}{3}(4^8 - 1) \quad \left[\because S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}, r > 1\right]$$

एक पत्र का डाक खर्च = ₹ 0.50

अतः कुल खर्च $= \frac{4}{3}(4^8 - 1) \times 0.50 = \frac{4}{3} \times (65536 - 1) \times 0.50$

$= \frac{4}{3} \times 65535 \times 0.50 =$ ₹ 43690

प्रश्न 30. **एक आदमी ने एक बैंक में ₹ 10000, 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर जमा किया। जब से रकम बैंक में जमा की गई तब से, 15वें वर्ष में उसके खाते में कितनी रकम हो गई तथा 20 वर्षों बाद कुल कितनी रकम हो गई, ज्ञात कीजिए?**

हल 1 वर्ष बाद ₹ 10000 पर ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 1}{100}$ $\left(\because I = \frac{P \times R \times T}{100}\right)$

= ₹ 500

एक वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 500 = 10500$

अब, दो वर्ष बाद ₹ 10000 पर ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 2}{100} =$ ₹1000

2 वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 1000 =$ ₹11000

इसी प्रकार, तीन वर्ष बाद ₹ 10000 पर ब्याज $= \frac{10000 \times 5 \times 3}{100} = 1500$

$\therefore$ तीन वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 1500 =$ ₹11500

अतः आदमी के खाते में पहले, दूसरे तथा तीसरे वर्ष बचत की राशि क्रमशः ₹ 10000, 10500, 11000, ... हैं।

यह समांतर श्रेढ़ी में है जहाँ, $a = 10000$ तथा $d = 500$

15 वर्ष में जमा की गई राशि $= T_{15} = a + 14d = 10000 + 14 \times 500$

$= 10000 + 7000 =$ ₹ 17000

20 वर्ष बाद जमा की गई राशि $= 10000 + 20 \times 500$

$= 10000 + 10000 =$ ₹ 20000

प्रश्न 31. **एक निर्माता घोषित करता है कि उसकी मशीन जिसका मूल्य ₹ 15625 है, हर वर्ष 20% की दर से उसका अवमूल्यन होता है। 5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए।**

यदि किसी मशीन की कीमत P है जो r% की दर से प्रतिवर्ष घट जाती है, तब n वर्षों बाद मशीन की कीमत का सूत्र निम्न है अर्थात्

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

हल यहाँ, श्रेणी है, $15625\left(1 - \frac{20}{100}\right), 15625\left(1 - \frac{20}{100}\right)^2, 15625\left(1 - \frac{20}{100}\right)^3, \ldots$

5 वर्ष बाद मशीन का अनुमानित मूल $= T_5 = 15625\left(1 - \frac{20}{100}\right)^5 = 15625 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^5$

$$= 15625 \times \left(\frac{5-1}{5}\right)^5$$

$$= 15625 \times \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= \frac{15625 \times 1024}{625 \times 5}$$

$$= \frac{25 \times 1024}{5} = 5 \times 1024$$

$$= 5120$$

नोट *ह्रास में, प्रत्येक वर्ष मूल्य का मान घटता है।*

प्रश्न 32. किसी कार्य को कुछ दिनों में पूरा करने के लिए 150 कर्मचारी लगाए गए। दूसरे दिन 4 कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया, तीसरे दिन 4 और कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया तथा इस प्रकार अन्य। अब कार्य पूर्ण करने में 8 दिन अधिक लगते हैं, तो दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें कार्य पूर्ण किया गया।

हल मान लीजिए दिनों की संख्या जिनमें कार्य पूर्ण किया जाता है n है। अब प्रश्नानुसार, प्रत्येक दिन चार कर्मचारी कार्य छोड़ देते हैं अर्थात् कर्मचारियों की संख्या निम्न प्रकार है, 150, 146, 142, 138, ... स्पष्ट रूप से, दोनों स्थितियों में कार्य करना समान है।

[यदि कोई कर्मचारी कार्य नहीं छोड़ता है, तब प्रत्येक दिन 150 कर्मचारियों द्वारा $(n-8)$ दिनों में कार्य पूर्ण होगा। अतः कर्मचारियों की कुल संख्या $150(n-8)$ होगी जिन्होंने n दिनों तक कार्य किया होगा।]

$$\Rightarrow \quad 150(n-8) = \frac{n}{2}[2 \times 150 + (n-1)(-4)] \quad \left[\text{सूत्र} S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \text{ से}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 150n - 1200 = \frac{n}{2} \times 2(150 - 2n + 2)$$

$$\Rightarrow \quad 150n - 1200 = \frac{n}{2} \times 2(152 - 2n)$$

प्रत्येक पद को 2 से भाग करने पर,

$$75n - 600 = n(76 - n) \Rightarrow 75n - 600 = 76n - n^2$$

$$n^2 - 76n + 75n - 600 = 0 \Rightarrow n^2 - n - 600 = 0$$

मध्य पद को विभक्त कर गुणनखंड करने पर,

$$\Rightarrow \quad n^2 - (25n - 24n) - 600 = 0 \Rightarrow n^2 - 25n + 24n - 600 = 0$$

$$\Rightarrow \quad n(n-25) + 24(n-25) = 0 \Rightarrow (n-25)(n+24) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 25$$

तथा $n \neq -24$ क्योंकि यह संभव नहीं है।

अतः 25 दिनों में कार्य पूर्ण होगा।